RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° aprile 1917.

A. Rôiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Nota I del Socio C. Somigliana.

L'ipotesi più semplice che si può fare, per avere una rappresentazione meccanica delle oscillazioni sismiche, è che si tratti di onde propagantisi in un suolo piano illimitato e infinitamente profondo.

Fu fatta anche l'ipotesi di uno strato piano illimitato, onde accordarsi con alcune vedute, attualmente accettate, intorno alla costituzione interna della terra. Così procede il Love in *Some Problems of Geodynamics*; ed anche il De Marchi nelle due interessanti Note, comunicate lo scorso anno a questa R. Accademia.

Io mi atterrò alla prima ipotesi, e considererò da un punto di vista generale la propagazione di onde piane. Si può così ugualmente arrivare ad alcuni risultati interessanti, da cui dedurre qualche nuovo concetto circa le principali caratteristiche del fenomeno, quale effettivamente si osserva.

Si ammette generalmente dai sismologi, dopo Oldham, che dei tre gruppi di onde, che compongono generalmente un sismogramma, quello che arriva ultimo, detto delle *undae longae*, che sono anche le più ampie e regolari, corrisponda alle *onde superficiali* scoperte da Lord Rayleigh. La velocità di propagazione di queste onde è teoricamente determinata da una delle tre radici reali, la più piccola, di una certa equazione di 3° grado. Per gli altri due gruppi si ammette che siano ordinarie onde piane, rispettivamente longitudinali e trasversali, provenienti dall'interno della terra.

Ora io ho potuto dimostrare che anche alle altre due radici dell'equazione di 3° grado di Lord Rayleigh, finora trascurate, corrispondono onde piane speciali del suolo, le quali risultano dalla sovrapposizione di un'onda longitudinale e di un'onda trasversale. Queste due onde hanno un'identica velocità di propagazione *superficiale*. L'equazione di Rayleigh dà appunto la soluzione del problema della ricerca delle coppie di onde (l'una longitudinale, l'altra trasversale) inclinate fra loro in modo da dar luogo ad una identica velocità di propagazione sulla superficie libera del suolo. Queste onde vengono così a sovrapporsi in superficie, e senza possibilità di interferire, a cagione della ortogonalità delle loro oscillazioni. È perciò anche presumibile che diano luogo agli effetti superficiali più sensibili.

Le onde superficiali di Rayleigh risultano poi, in certo modo, una soluzione singolare del problema enunciato.

Da questi risultati sorge quindi spontanea, e suggestiva, l'idea di far corrispondere alle tre radici dell'equazione di Rayleigh ed ai tre relativi sistemi di onde, i tre gruppi di vibrazioni che la osservazione rivela. Anche numericamente i valori che si ottengono per le velocità di propagazione sono in sufficiente accordo con quelli osservati.

Si avrebbe così una spiegazione meccanica, mai data finora, della formazione dei tre gruppi caratteristici (P), (S), (L) di onde, che quasi sempre si osservano. Tuttavia l'approssimazione che è possibile raggiungere nel problema delle vibrazioni di un suolo piano, rispetto a quelle della sfera, ci induce ad attribuire a tale spiegazione un carattere più qualitativo che quantitativo. Un apprezzamento definitivo non si potrà avere che quando sia possibile trasportare le considerazioni enunciate nel campo della sfera vibrante.

I.

Consideriamo un suolo piano illimitato, che supporremo orizzontale. L'asse delle z sia verticale, diretto dal basso verso l'alto, e sia $z = 0$ la superficie del suolo.

Chiameremo piano di propagazione il piano determinato dalla normale ad un sistema di onde piane e dalla verticale, passanti per uno stesso punto. Fissata l'origine in un punto del piano $z = 0$, sceglieremo come piano zx il piano di propagazione rispetto al sistema di onde piane, che vogliamo studiare. Il piano d'onda sarà allora parallelo all'asse delle y; e se indichiamo con

$$\alpha x + \gamma z = \text{cost.}$$

l'equazione di uno qualsiasi dei piani d'onda, e con θ l'angolo, che diremo di *emergenza*, che la direzione di propagazione fa coll'asse delle x, avremo

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} .$$

Il vettore rappresentante la vibrazione avrà allora una componente secondo la normale all'onda, che darà luogo ad un movimento longitudinale e sarà rappresentato da

$$(1)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \alpha\varphi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t) \\ v_1 &= 0 \\ w_1 &= \gamma\varphi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t), \end{aligned}$$

ove φ è una funzione arbitraria, ed u, v, w rappresentano le solite componenti di spostamento, t è il tempo ed ε_1 una costante. Se la funzione φ avesse valori differenti da zero solo per valori dell'argomento

$$\zeta = \alpha x + \gamma z - \varepsilon_1 t$$

compresi fra certi limiti, si avrebbe un'onda *isolata* o *solitaria*, come suol dirsi.

Avremo poi una componente normale alla direzione di propagazione, che alla sua volta potrà decomporsi in due: l'una giacente nel piano zx cioè nel piano di propagazione e rappresentata da

$$(2)\qquad \begin{aligned} u_2 &= \gamma\psi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_2 t) \\ v_2 &= 0 \\ w_2 &= -\alpha\psi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_2 t) \end{aligned}$$

e l'altra parallela all'asse y, normale al piano di propagazione, rappresentata da

$$(3)\qquad \begin{aligned} u_3 &= 0 \\ v_3 &= \chi(\alpha x + \gamma z - \varepsilon_3 t) \\ w_3 &= 0 \end{aligned}$$

ove ψ, χ sono nuove funzioni arbitrarie, $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ delle nuove costanti.

L'onda piana più generale si avrà dalla sovrapposizione dei tre sistemi di vibrazioni (1) (2) (3), cioè avrà per componenti di vibrazione

$$u = u_1 + u_2 + u_3 \qquad v = v_1 + v_2 + v_3 \qquad w = w_1 + w_2 + w_3.$$

Le relazioni che risultano dalle equazioni del moto per le costanti $\alpha, \gamma, \varepsilon$ sono quelle ben note, che determinano le velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali. La vibrazione (1) è longitudinale; la sua velocità normale di propagazione, indicando con λ, μ le costanti elastiche di Lamé, con ϱ la densità, sarà data da

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}.$$

Ma se indichiamo con V la velocità superficiale di propagazione dell'onda (o anche la velocità di propagazione nella direzione dell'asse delle x) si ha

$$(4) \qquad V = \frac{\varepsilon_1}{\alpha} \quad \text{e quindi} \quad a = V \cos\theta .$$

Da cui deduciamo

$$(5) \qquad \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}(\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon_1^2 .$$

In modo analogo, osservando che le onde (2), (3) sono trasversali, si conclude che la loro velocità normale di propagazione sarà

$$b = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$$

e quindi per le relazioni precedenti $\varepsilon_3 = \varepsilon_2$,

$$(6) \qquad \frac{\mu}{\varrho}(\alpha^2 + \gamma^2) = \varepsilon_2^2 .$$

Queste relazioni (5), (6) sono le sole necessarie e sufficienti, perchè le (1), (2), (3) possano rappresentare sistemi di onde piane possibili in un mezzo illimitato in ogni senso, le cui costanti d'elasticità siano λ, μ e ϱ la densità.

II.

Consideriamo ora due onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale, aventi angoli d'emergenza differenti, θ_a e θ_b. Siano α_1, γ_1 le due costanti α, γ per la prima, ed α_2, γ_2 per la seconda. Le rispettive velocità superficiali di propagazione saranno

$$V_a = \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} = \frac{a}{\cos\theta_a} \qquad V_b = \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} = \frac{b}{\cos\theta_b}$$

mentre per (5), (6) dovrà essere

$$(7) \qquad \varepsilon_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) \qquad \varepsilon_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}(\alpha_2^2 + \gamma_2^2) .$$

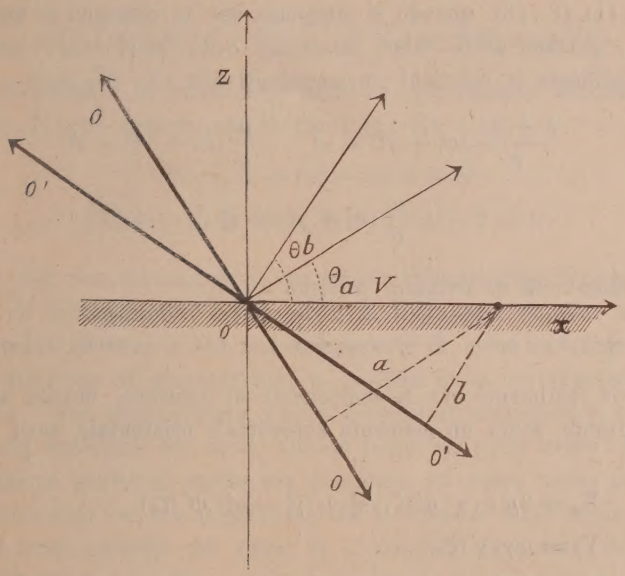
Ora noi possiamo domandarci quali condizioni debbano essere soddisfatte perchè le velocità superficiali delle due onde risultino identiche: cioè perchè

sia $V_a = V_b$. Si dovrà avere fra i due angoli di emergenza (vedi la annessa figura) la relazione

$$a \cos \theta_b = b \cos \theta_a \tag{8}$$

ossia

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \gamma_1^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2}}. \tag{8'}$$



Possiamo quindi immaginare infinite coppie di onde piane (come le 00, 0'0' della figura annessa) l'una longitudinale, l'altra trasversale, a cui competono velocità identiche di propagazione superficiale. Le rispettive inclinazioni delle due direzioni di propagazione sono determinate dalla (8) o dalla (8').

Però in generale non possiamo dire che una coppia di onde sovrapposte di tal fatta possa effettivamente propagarsi nel suolo che consideriamo, se non teniamo conto anche delle condizioni che devono essere soddisfatte alla superficie.

Noi ci proporremo appunto di determinare quali condizioni debbano essere soddisfatte perchè una coppia di onde sovrapposte, come quelle ora considerate, possa effettivamente propagarsi in un suolo piano. Dovranno, come è ben noto, essere nulle le componenti della tensione elastica relativa a

qualsiasi elemento piano della superficie libera; cioè si dovrà avere, per $z=0$,

$$(9)\qquad \begin{aligned} X_z &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \\ Y_z &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \\ Z_z &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\,\frac{\partial w}{\partial z}=0\,. \end{aligned}$$

Ora consideriamo la vibrazione che risulta dalla sovrapposizione delle vibrazioni (1), (2), (3), quando si supponga che in ciascuna di queste le costanti α, γ possano avere valori particolari $\alpha_1\gamma_1$, $\alpha_2\gamma_2$, $\alpha_3\gamma_3$, sempre supponendo verificate le relazioni corrispondenti alle (5), (6), cioè

$$(10)\qquad \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}(\alpha_1^2+\gamma_1^2)=\varepsilon_1^2 \qquad \frac{\mu}{\varrho}(\alpha_2^2+\gamma_2^2)=\varepsilon_2^2$$
$$\frac{\mu}{\varrho}(\alpha_3^2+\gamma_3^2)=\varepsilon_2^2\,.$$

Per semplicità di scrittura porremo

$$\zeta_1=\alpha_1 x+\gamma_1 z-\varepsilon_1 t \qquad \zeta_2=\alpha_2 x+\gamma_2 z-\varepsilon_2 t \qquad \zeta_3=\alpha_3 x+\gamma_3 z-\varepsilon_2 t\,.$$

Si vede facilmente che le componenti di tensione, dovute alla vibrazione risultante, sopra un elemento superficiale orizzontale, sono date dalle espressioni

$$(11)\qquad \begin{aligned} X_z &= 2\mu\,\alpha_1\gamma_1\,\varphi'(\zeta_1)+\mu(\gamma_2^2-\alpha_2^2)\,\psi'(\zeta_2) \\ Y_z &= \mu\,\gamma_3\,\chi'(\zeta_3) \\ Z_z &= [\lambda(\alpha_1^2+\gamma_1^2)+2\mu\gamma_1^2]\,\varphi'(\zeta_1)-2\mu\,\alpha_2\gamma_2\,\psi'(\zeta_2) \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\varphi'(\zeta)=\frac{d\varphi(\zeta)}{d\zeta} \qquad \psi'(\zeta)=\frac{d\varphi'(\zeta)}{d\zeta} \qquad \chi'(\zeta)=\frac{d\chi(\zeta)}{d\zeta}\,.$$

La vibrazione considerata è la più generale che possiamo dedurre dalle nostre formole relative alle onde piane. Ora dalle formole precedenti per le tensioni, risulta che non è possibile che Y_z si annulli senza supporre una forma speciale per $\chi(\zeta)$ che porti come conseguenza $\chi'(\zeta_3)=0$, per $z=0$. Possiamo invece cercare di soddisfare alle altre due condizioni, senza imporre alcuna condizione di questo genere alle funzioni φ, ψ.

Supponiamo infatti che fra le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ si abbia la relazione

$$(12)\qquad \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}=\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}=V$$

cioè che sia identica la velocità di propagazione superficiale delle onde (1) e (2); ed inoltre che sia

$$(13)\qquad \varphi'(\zeta) = A\,\Psi'\left(\frac{\zeta}{\alpha_1}\right) \qquad \psi'(\zeta) = B\,\Psi'\left(\frac{\zeta}{\alpha_2}\right)$$

dove Ψ' è una nuova funzione arbitraria (che per comodità di calcolo poniamo sotto forma di derivata), ed A , B sono delle costanti. È chiaro che per $z = 0$ avremo

$$\varphi'(\zeta_1) = A\,\Psi'(x - Vt) \qquad \Psi'(\zeta_2) = B\,\Psi'(x - Vt)$$

e quindi la prima e la terza delle equazioni (9) saranno soddisfatte, se le costanti A , B sono determinate in modo che sia

$$(14)\qquad \begin{aligned} 2\alpha_1\,\gamma_1\,A + (\gamma_2^2 - \alpha_2^2)\,B &= 0 \\ [\lambda(\alpha_1^2 + \gamma_1^2) + 2\mu\,\gamma_1^2]\,A - 2\mu\,\alpha_2\,\gamma_2\,B &= 0\,. \end{aligned}$$

Otterremo così una vibrazione, il cui vettore vibrante giacerà completamente nel piano di propagazione; avrà quindi, in linguaggio sismico, una componente di moto *sussultorio*, ed una componente di moto *ondulatorio*, parallela alla direzione di propagazione; e risulterà dalla sovrapposizione di due onde piane, l'una longitudinale, l'altra trasversale propagantesi con velocità uguale sulla superficie del suolo. Questo moto poi potrà avere i caratteri di una vibrazione qualsiasi, anche non periodica, ed essere anche costituito da un'*onda solitaria*, se noi supponiamo che la funzione $\Psi(\zeta)$ abbia valori differenti da zero, soltanto per valori di ζ compresi entro certi limiti l , L ; cioè quando sia

$$l < \zeta < L\,.$$

Dobbiamo ora vedere se, e come, sia possibile soddisfare a tutte queste condizioni mediante le costanti che entrano nelle nostre formole. Queste condizioni sono rappresentate dalle prime due equazioni (10), e dalle (12), (14).

Innanzi tutto per la compatibilità delle due equazioni (14), dovremo avere, eliminando il rapporto A:B,

$$(15)\qquad 4\mu\,\alpha_1\,\alpha_2\,\gamma_1\,\gamma_2 + (\lambda\alpha_1^2 + (\lambda + 2\mu)\,\gamma_1^2)\,(\gamma_2^2 - \alpha_2^2) = 0\,.$$

Questa equazione determina una relazione che deve esistere fra le due direzioni di propagazione delle due onde associate. Essendo infatti

$$\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \operatorname{tg}\theta_a \qquad \frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \operatorname{tg}\theta_b$$

essa può essere scritta anche

$$4\mu \operatorname{tg}\theta_a \operatorname{tg}\theta_b + (\lambda + (\lambda + 2\mu)\operatorname{tg}^2\theta_a)(\operatorname{tg}^2\theta_b - 1) = 0 . \tag{15'}$$

Inoltre dalle (10) abbiamo

$$\begin{aligned} \varrho\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}\right)^2 &= (\lambda + 2\mu)\left(1 + \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\right) \\ \varrho\left(\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}\right)^2 &= \mu\left(1 + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{16}$$

e quindi per le (12)

$$\varrho V^2 = (\lambda + 2\mu)\left(1 + \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\right) = \mu\left(1 + \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\right). \tag{17}$$

Mediante queste due relazioni possiamo eliminare i rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ dalla (15) ed ottenere un'equazione che contenga soltanto V. Si arriva facilmente a questa equazione osservando che dalla (15) si ha

$$16\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\mu^2 = \left(\lambda + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}\right)^2\right)^2\left(1 - \left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}\right)^2\right)^2$$

e sostituendo in questa i valori di $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ che risultano dalle (17). Si ottiene così

$$16\left(\frac{\varrho V^2}{\lambda + 2\mu} - 1\right)\left(\frac{\varrho V^2}{\mu} - 1\right)\mu^2 = (\varrho V^2 - 2\mu)^2\left(2 - \frac{\varrho}{\mu}V^2\right)^2$$

ossia introducendo le costanti a, b del mezzo

$$\left(\frac{V^2}{b^2} - 2\right)^4 - 16\left(\frac{V^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{V^2}{b^2} - 1\right) = 0 . \tag{18}$$

È questa l'equazione che determina V; ed essa coincide esattamente colla equazione a cui è giunto Lord Rayleigh ricercando la velocità di propagazione delle sue onde superficiali. Noi vi siamo giunti per altra via, studiando un problema assai diverso; ma la soluzione di Rayleigh rientra nel quadro generale delle formole che abbiamo stabilito, come vedremo meglio in seguito. Essa si presenta come una soluzione *singolare* del problema della propagazione delle onde sovrapposte, aventi uguale velocità superficiale di propagazione.

Per ogni radice della equazione di Rayleigh (18), le relazioni (16) determinano i corrispondenti valori dei rapporti $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \frac{\gamma_2}{\alpha_2}$ ossia di $\operatorname{tg}\theta_a, \operatorname{tg}\theta_b$,

e dànno quindi le due direzioni di propagazione delle due onde associate. Dalle (14) poi si potrà ricavare il valore del rapporto A:B, e quindi tenendo conto delle (13) ottenere le effettive espressioni delle componenti di vibrazione. Conviene pertanto discutere la possibilità di soluzioni reali per tutte queste equazioni.

Ricordiamo anzitutto che l'equazione (18) ammette la soluzione $V^2 = 0$, e che togliendo questo fattore V^2 e ponendo

$$V^2 = \eta b^2$$

essa assume la forma

$$(19) \qquad f(\eta) = \eta^3 - 8\eta^2 + 8\left(3 - 2\frac{b^2}{a^2}\right)\eta - 16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = 0 .$$

E siccome si ha

$$f(0) = -16\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \qquad f(1) = 1$$

ed inoltre, per note proprietà,

$$\frac{b^2}{a^2} < 1 ,$$

essa ha sempre una radice compresa fra 0 ed 1. Il valore corrispondente di V sarà perciò minore della velocità b delle onde trasversali. Ora dalle (16) si ottiene

$$(20) \qquad \operatorname{tg}^2\theta_a = \frac{b^2}{a^2}\eta - 1 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = \eta - 1$$

e perciò, se $\eta < 1$, i corrispondenti valori di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$ non possono essere reali.

Alla radice considerata della equazione di Rayleigh non corrisponde perciò alcuna soluzione reale del problema da noi posto. Ma *formalmente* le nostre equazioni sono soddisfatte anche dai valori immaginarî, che in tal modo si trovano; quindi, separando la parte reale dalla immaginaria, noi possiamo ottenere anche in questo caso delle soluzioni reali delle equazioni delle vibrazioni; le quali non corrisponderanno allo speciale problema meccanico, da cui siamo partiti, ma rappresenteranno sempre delle vibrazioni speciali possibili nel suolo. Le onde superficiali di Lord Rayleigh non sono che un caso particolare di queste vibrazioni. Ce ne occuperemo in seguito.

Consideriamo ora il caso in cui il nostro problema ammette soluzioni reali.

Discuterò in altra occasione quali siano le condizioni perchè le radici dell'equazione (18) siano tutte reali. Qui mi limiterò a considerare il caso,

ammesso come tipico dai sismologi, anzi, si può dire, da essi quasi unicamente preso in considerazione, quello in cui

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$$

che corrisponde al caso in cui pel coefficiente di Poisson si ha $\sigma = \frac{1}{4}$, valore che si ritiene abbastanza prossimo al valor medio di questo coefficiente pei materiali che compongono la crosta superficiale terrestre. In questo caso la equazione (19) diviene

$$\eta^3 - 8\eta^2 + \frac{56}{3}\eta - \frac{32}{3} = 0$$

e le sue radici sono tutte reali, e cioè [1]

$$\eta_1 = 4 \qquad \eta_2 = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \eta_3 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

L'ultima, minore di 1, è quella di cui abbiamo poco innanzi dimostrata l'esistenza per qualunque valore del rapporto $b^2 : a^2$.

Lasciando per ora da parte questa radice, che dà le onde di Rayleigh, cerchiamo i valori di θ_a, θ_b corrispondenti alle altre due.

Le equazioni (20) per la prima radice $\eta_1 = 4$ dànno

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tg}\theta_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg}\theta_b = \sqrt{3} \qquad V_1 = 2b\,,$$

quindi abbiamo rispettivamente per l'angolo di emergenza dell'onda longitudinale e della trasversale associata i valori

$$\theta_a = 30° \qquad \theta_b = 60°.$$

Osserviamo inoltre che colle formole (20) sono compatibili anche i valori

$$\theta_a = -30° \qquad \theta_b = -60°$$

i quali corrispondono alle due onde riflesse delle precedenti sulla superficie libera del suolo. Per ogni coppia di onde sovrapposte, che otterremo come possibile dalle nostre equazioni, avremo quindi sempre anche la coppia delle corrispondenti onde riflesse.

[1] V. Galitzin, *Lezioni di Sismometria*, Cap. II.

Consideriamo ora la seconda radice η_2. Abbiamo in questo caso dalle (20)

$$\operatorname{tg}^2\theta_a = \frac{1}{\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) = 0{,}0515\ b$$

$$\operatorname{tg}^2\theta_b = \frac{1}{\sqrt{3}}(2+\sqrt{3}) = 2{,}1547\ b \tag{22}$$

$$V_2 = b\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 1{,}7761\ b$$

da cui si ricava, trascurando i secondi di grado,

$$\theta_a = \pm\ 12°.47' \qquad \theta_b = \pm\ 55°.44'.$$

Sono questi i valori numerici corrispondenti alla seconda coppia di onde associate. nel caso che pel rapporto di Poisson si assuma il valore solitamente ammesso $\sigma = \frac{1}{4}$. Ma ciò che più interessa la nostra teoria è il fatto che questi valori sono tutti reali e dimostrano quindi la reale esistenza delle onde considerate.

Ritorniamo ora alle formole iniziali, da cui siamo partiti, per ricavarne le espressioni effettive delle componenti di vibrazione colla introduzione dei valori trovati per le costanti. Scriveremo queste espressioni sotto forma generale, applicabile tanto alle onde della radice η_1 che a quella della radice η_2. Conserveremo cioè le espressioni generiche V , $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, per le quali nei due casi si dovranno poi prendere rispettivamente i valori (21) o (22).

Tenendo presenti le equazioni (13) possiamo porre

$$\varphi(\zeta_1) = \mathrm{A}\,\Psi\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1}z + x - \mathrm{V}t\right)$$

$$\varphi(\zeta_2) = \mathrm{B}\,\Psi\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_2}z + x - \mathrm{V}t\right).$$

Mentre dalla prima delle equazioni (14) ricaviamo

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta_b}{2\operatorname{tg}\theta_a}\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$$

e possiamo quindi porre

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\alpha_1^2\operatorname{tg}\theta_a} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{\alpha_2^2(1-\operatorname{tg}^2\theta_b)}.$$

Ora sostituendo nelle equazioni

$$u_1 = \alpha_1 \varphi(\zeta_1) \qquad u_2 = \gamma_2 \psi(\zeta_2)$$
$$w_1 = \gamma_1 \varphi(\zeta_1) \qquad w_2 = -\alpha_2 \psi(\zeta_2)$$

troviamo per l'onda longitudinale

$$(23) \qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} \theta_a} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_a + x - Vt) \\ w_1 &= \frac{1}{2\alpha_1} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_a + x - Vt) \end{aligned}$$

e per la trasversale

$$(23') \qquad \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \frac{\operatorname{tg} \theta_b}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_b + x - Vt) \\ w_2 &= -\frac{1}{\alpha_2} \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b} \Psi(z \operatorname{tg} \theta_b + x - Vt) \end{aligned}$$

ed abbiamo così la rappresentazione completa di una qualsiasi delle nostre coppie di onde associate, cui compete uguale velocità di propagazione superficiale, come manifestamente risulta dalle formole precedenti.

In queste formole Ψ è funzione completamente arbitraria. Nessuna limitazione quindi risulta per le onde che si propagano in superficie, cioè sul piano $z = 0$. Esse possono essere anche *non periodiche*, ed essere anche *onde isolate* se supponiamo che la Ψ abbia valori nulli quando la variabile da cui dipende esce da certi limiti arbitrariamente fissati. La teoria basata sulle formole precedenti è quindi indipendente da qualsiasi ipotesi circa la lunghezza d'onda delle vibrazioni, e conciliabile con qualsiasi dato di fatto che l'osservazione possa rivelare a questo proposito. La possibilità dell'onda isolata poi ci avvicina notevolmente alla realtà.

Finalmente le costanti α_1, α_2 nelle formole precedenti sono ancora a nostra disposizione. Noi possiamo approfittare di questa arbitrarietà per introdurre un elemento importante.

Il movimento vibratorio sulla superficie del suolo, risultante dalla sovrapposizione delle onde associate (23), (23') sarà dato dalle componenti

$$(24) \qquad \begin{aligned} u_0 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1 \operatorname{tg} \theta_a} + \frac{\operatorname{tg} \theta_b}{\alpha_2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)} \right] \Psi(x - Vt) \\ w_0 &= \left[\frac{1}{2\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b)} \right] \Psi(x - Vt) \end{aligned}$$

e rappresenta quindi un movimento vibratorio arbitrario, vincolato alla sola

condizione di propagarsi in superficie colla velocità V, e di mantenere una inclinazione costante, sulla direzione di propagazione.

Possiamo anche determinare α_1, α_2 in modo che l'ampiezza di queste componenti di oscillazione abbia valori assegnati, conformi a quelli osservati effettivamente. Una delle difficoltà che si presentano rispetto alle onde di Rayleigh è appunto il fatto che il rapporto della componente verticale alla orizzontale nella direzione di propagazione risulta determinato, e uguale perciò ad un numero fisso che non sempre concorda colle osservazioni [1]. Nelle formole precedenti questo rapporto può avere qualsiasi valore, e può essere determinato con opportuna scelta del rapporto $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Si ha infatti

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{u_0}{w_0} - \frac{1}{\operatorname{tg}\theta_a}}{\frac{u_0}{w_0} + \operatorname{tg}\theta_b} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta_b). \tag{25}$$

Può considerarsi con ciò esaurito il problema della rappresentazione analitica di una coppia qualsiasi di onde associate, corrispondenti ad una radice dell'equazione di Rayleigh per cui risultino reali i valori di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, a cui corrispondono cioè angoli reali di emergenza.

Studierò in una Nota successiva le onde che corrispondono alla radice η_3 (minore della unità) dell'equazione di Rayleigh, e dimostrerò che esse costituiscono una generalizzazione delle così dette onde superficiali di Rayleigh. In seguito discuterò della possibilità di applicare i risultati ottenuti ad una interpretazione meccanica delle oscillazioni sismiche, secondo i concetti che ho sommariamente esposti da principio.

Meccanica. — *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Nella presente Nota, dopo aver richiamato, per comodo del lettore, l'idea direttiva e l'impostazione matematica della relatività generale, mostro come alcune identità (fra le derivate dei simboli di Riemann) scoperte dal Bianchi offrano un sicuro criterio per introdurre il così detto tensore gravitazionale. Sotto l'aspetto analitico si tratta di un sistema doppio simmetrico A_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$), i cui dieci elementi caratterizzano completamente il contributo della gravitazione nel comportamento meccanico locale, individuando sì gli sforzi specifici che il flusso e la densità di energia (di origine gravitazionale). Il significato meccanico del sistema implica una struttura analitica dotata di convenienti proprietà invariantive di fronte ad eventuali

[1] Cfr. Love, *Some Problems of Geodynamics*, Ch. XI, n. 160, 161.

trasformazioni di coordinate. Tale è in effetti la forma (covariante) delle A_{ik} fornita dal criterio suaccennato, la quale inoltre dà luogo ad una estensione particolarmente espressiva del principio di d'Alembert.

L'idea di un tensore gravitazionale fa parte della grandiosa costruzione di Einstein. Però la definizione propostane dall'Autore non può risguardarsi definitiva. Anzi tutto, dal punto di vista matematico, le fa difetto quel carattere invariantivo che dovrebbe invece necessariamente competerle secondo lo spirito della relatività generale. E anche più grave è il fatto, avvertito con fine intuito dallo stesso Einstein [1], che se ne trae una conseguenza fisica palesemente inaccettabile a proposito delle onde di gravitazione. Per questo punto egli trova tuttavia un accomodamento nella teoria dei quanti.

In verità la spiegazione è meno riposta: tutto dipende dalla non corretta forma assunta per il tensore gravitazionale. Vedremo che colla nostra determinazione scompare automaticamente ogni possibilità di paradosso.

1 Generalità. — Nella meccanica ordinaria, lo spazio fisico si considera rigorosamente euclideo, e la rappresentazione analitica dei fenomeni è, per così dire, subordinata alla forma differenziale quadratica (ternaria) dl^2 che esprime il quadrato dell'elemento lineare.

Nella teoria della relatività in senso stretto, si seguita a risguardare lo spazio come euclideo; ma le equazioni della meccanica hanno carattere invariantivo, non più rispetto alla forma dl^2, sibbene rispetto ad una forma quadernaria ds^2 che involge anche il tempo t ed ha notoriamente l'espressione

$$ds^2 = c^2\,dl^2 - dl^2 \tag{1}$$

(c costante universale da interpretarsi come velocità della luce nel vuoto).

Ben si intende che, con referenza a coordinate cartesiane, si ha qui ancora

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 .$$

Nella relatività generale — nuova e più comprensiva concezione delle leggi naturali, dovuta anch'essa ad Einstein — spazio e tempo non costituiscono una semplice localizzazione, inerte e immutabile, dei fenomeni, ma ne sono affetti e reagiscono per guisa che il ds^2 cambia natura.

Al posto di (1), si ha una forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k , \tag{2}$$

la quale, con opportuna scelta dei parametri x_0 , x_1 , x_2 , x_3, si riduce esat-

[1] *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss., 1916, pag. 696.

tamente alla forma (1) nel caso limite in cui manchi qualsiasi azione fisicamente percettibile (presenza o moto di materia, di elettricità, o più generalmente di qualche forma di energia). Di regola, la (2), pur essendo quantitativamente molto prossima al tipo (1), deve ritenersi non data *a priori* ma intrinsecamente definibile in base alle circostanze di fatto. Fra queste figura naturalmente anche la gravitazione universale, cui compete, secondo Einstein, il privilegio di dipendere esclusivamente dai coefficienti g_{ik} (e loro derivate).

Le equazioni tutte della nuova meccanica hanno carattere invariantivo rispetto a quella ben determinata forma (2) che conviene al caso specifico. In questa nuova meccanica la teoria di una data classe di fenomeni comprende necessariamente, accanto a relazioni le quali hanno riscontro nelle precedenti impostazioni (classica e relativistica della prima maniera), ulteriori relazioni destinate a caratterizzare il ds^2. Tali sono le equazioni gravitazionali di Einstein (in numero di 10 come i coefficienti g_{ik}), che considereremo esplicitamente al § 6.

2. Tensore energetico. — La meccanica dei sistemi continui — anche secondo lo schema ordinario — porta a ritenere ben conosciuto un fenomeno meccanico (che si svolge in un certo campo di valori di x, y, z, t), allorquando sono assegnati (in funzione del posto e del tempo) i seguenti elementi: sforzi, quantità di moto, flusso e densità di energia.

Nella meccanica relativistica, il vettore $\mathbf{q}$, che rappresenta la densità di quantità di moto, è legato al flusso di energia χ dalla relazione

$$\mathbf{q} = \frac{1}{c^2}\chi ,$$

e conviene far capo all'unico vettore

$$-\mathbf{f} = c\mathbf{q} = \frac{1}{c}\chi , \tag{3}$$

che si può risguardare come flusso di energia durante un secondo di luce (intervallo di tempo entro cui la luce percorre l'unità di lunghezza). Notiamo del resto, a scanso di equivoci, che non intendiamo con ciò di fissare l'unità di tempo: essa rimane generica al pari delle altre due unità fondamentali.

Poniamo, per brevità di scrittura,

$$y_0 = ct \quad , \quad y_1 = x \quad , \quad y_2 = y \quad , \quad y_3 = z , \tag{4}$$

e introduciamo, con referenza a queste variabili, un tensore simmetrico T_{ik} così definito: Per $i, k = 1, 2, 3$, T_{ik} è la componente secondo l'asse delle y_k dello sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale normale

all'asse delle y_i (1) (o viceversa, scambiando i con k); $T_{io} = T_{oi}$ si identifica colla componente $\bar{f}_i$ del vettore $\bar{f}$; infine T_{oo} è la densità dell'energia.

3. Riferimento a coordinate qualunque. — Se alle y_i si sostituiscono quattro combinazioni (indipendenti) qualisivogliano x_0, x_1, x_2, x_3, la forma

$$(1') \qquad ds^2 = c^2 dy_0^2 - (dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2)$$

assume l'aspetto generale (2). Varranno tuttavia le restrizioni qualitative

$$(5) \qquad g_{oo} > 0 \quad , \quad g_{ii} < 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

ogni qualvolta il parametro x_0 (variando da solo) è atto a rispecchiare la nozione intuitiva di tempo, mentre le rimanenti x_i sono in qualche modo interpretabili come effettive coordinate di spazio.

Ciò ritenuto, *per tensore energetico in coordinate qualunque x_i si intenderà quel sistema covariante doppio T_{ik}, che, riferito alle y, si specifica nel modo indicato.*

Dalle stesse formule di covarianza con cui rimangono definiti i varii elementi del sistema T_{ik}, si desume, per ognuno di essi, una interpretazione in coordinate generali x. E precisamente si trova (2) che:

$\dfrac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii}\, g_{kk}}} = \dfrac{T_{ki}}{\sqrt{g_{ii}\, g_{kk}}}$ $(i, k = 1, 2, 3)$ rappresenta la componente (ortogonale) secondo la linea x_i (cioè quella su cui varia la sola x_i) dello sforzo che si esercita sopra un elemento superficiale perpendicolare alla linea x_k (o viceversa, scambiando i con k);

$\dfrac{T_{io}}{\sqrt{-g_{oo}\, g_{ii}}} = \dfrac{T_{oi}}{\sqrt{-g_{oo}\, g_{ii}}}$ $(i = 1, 2, 3)$ rappresenta la componente di $\bar{f}$ secondo la linea x_i (in quanto si immagini decomposto il vettore $\bar{f}$ secondo il triedro delle linee coordinate);

infine $\dfrac{T_{oo}}{g_{oo}}$ è la densità di distribuzione della energia nello spazio (x_1, x_2, x_3) [cui si attribuisca la determinazione metrica corrispondente a $-ds^2$ per $dx_0 = 0$].

4. Invariante lineare e divergenza del tensore energetico. — Ci atteniamo al solito simbolismo del calcolo differenziale assoluto. Rappresentiamo perciò con $g^{(ik)}$ gli elementi reciproci ai coefficienti g_{ik}; e con

(1) Colla convenzione (abituale in idrodinamica) che sforzo normale positivo corrisponda a pressione.

(2) Sarebbe fuor di luogo che io mi indugiassi ora sulle modalità di deduzione. Ma mi permetto di rilevare che non occorrono sviluppi materiali, purchè si ricorra ad un opportuno adattamento dei metodi del calcolo differenziale assoluto ai ds^2 indefiniti che conglobano spazio e tempo.

T_{ikl} $(i, k, l = 0, 1, 2, 3)$ il sistema derivato covariante di T_{ik} secondo la forma fondamentale. Pel momento, come già nel precedente §, riterremo che questa sia la (1'), la quale, riferita a coordinate qualunque x, assume l'aspetto generico (2).

Ponendo

$$T = \sum_{0}^{3}{}_{ik} g^{(ik)} T_{ik}, \tag{6}$$

si definisce un invariante, detto appunto *invariante lineare* o *scalare del tensore energetico.*

Si chiama invece *divergenza* dello stesso tensore energetico il sistema covariante semplice (o vettore quadridimensionale)

$$F_i = \sum_{0}^{3}{}_{kl} g^{(kl)} T_{ikl} \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{7}$$

Il significato meccanico della divergenza (come quello di T, che tralascio di rilevare perchè immediato) si rende manifesto, riportandosi alle variabili y. Rispetto a tali variabili, $g^{(ik)} = 0$ $(i \neq k)$, $g^{(00)} = 1$, $g^{(ii)} = -1$ $(i = 1, 2, 3)$, e la derivazione covariante coincide coll'ordinaria.

Si ha quindi

$$F_i = \frac{\partial T_{i0}}{\partial y_0} - \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial T_{ik}}{\partial y_k} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$F_0 = \frac{\partial T_{00}}{\partial y_0} - \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial T_{0k}}{\partial y_k}.$$

Teniamo presente il § 2 e notiamo che, in forza della (3), le T_{i0} si identificano con $-c\,q_i$ (q_i componenti della densità di quantità di moto $\mathbf{q}$). Con ciò apparisce ovviamente dalle prime tre equazioni testè scritte (riponendovi ct per y_0) che $-F_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sono componenti della forza esterna $\mathbf{F}$ applicata al sistema (per unità di volume); l'ultima equazione, qualora [sempre in base alle (3)] si prendano le T_{0k} sotto la forma $-\frac{1}{c}\chi_k$ (χ_k componenti del flusso di energia χ), mostra poi che cF_0 è la densità di potenza, cioè l'energia comunicata dall'esterno al sistema per unità di tempo e di volume. Si può anche dire, se si vuole, che F_0 rappresenta l'energia comunicata al sistema, per unità di volume, in un secondo di luce. Ne consegue in particolare che, in un sistema isolato, la divergenza è nulla.

Ove ci si riferisca a coordinate qualunque x_i, il carattere covariante del sistema semplice F_i consente senz'altro di interpretare $\frac{-F_1}{\sqrt{-g_{11}}}, \frac{-F_2}{\sqrt{-g_{22}}}, \frac{-F_3}{\sqrt{-g_{33}}}$ quali componenti di $\mathbf{F}$ secondo le linee coordinate x_1, x_2, x_3;

$\frac{F_0}{\sqrt{g_{00}}}$ quale energia ceduta in un secondo di luce all'unità di volume del sistema.

5. Passaggio alla relatività generale. — Pur riferendoci a coordinate generali, abbiamo supposto finora che si tratti di un ds^2 euclideo. Formalmente le cose vanno nello stesso modo anche per un ds^2 essenzialmente irriducibile al tipo (1'), semprechè tuttavia:

a) x_0 sia interpretabile come tempo e le altre tre coordinate come parametri di spazio, valendo in conformità le disuguaglianze (5);

b) si conservino (nell'infinitesimo) le intuizioni meccaniche abituali, sicchè sia possibile attribuire un senso positivo a misure locali di forza, sforzi, flusso e densità di energia. In tali condizioni rimane univocamente definito il tensore energetico pel tramite dei rapporti

$$\frac{T_{ik}}{\sqrt{g_{ii}\,g_{kk}}}\ (i,k=1,2,3)\quad;\quad \frac{T_{0i}}{\sqrt{-g_{00}\,g_{ii}}}\ (i=1,2,3)\quad;\quad \frac{T_{00}}{g_{00}},$$

di cui al § 3.

D'ora innanzi il nostro ds^2 si intenderà *a priori* qualunque (salvo le restrizioni suindicate); e si assumerà naturalmente lo stesso ds^2 per forma fondamentale.

6. Le equazioni del campo gravitazionale. — Indichino $g_{ij,hk}$ $(i,j,h,k=0,1,2,3)$ i simboli di Riemann di prima specie spettanti ad un generico ds^2 quadernario (2). Attesa la loro covarianza, le posizioni

$$G_{ik}=\sum_{jh}^{0\ldots3} g^{(jh)}\,g_{ij,hk}\qquad (i,k=0,1,2,3) \tag{8}$$

definiscono un sistema covariante doppio.

Ove si tengano presenti le formule [1]

$$g_{ij,hk}=\sum_{v}^{0\ldots3} g_{jv}\,\{iv,hk\},$$

$$\{ir,hk\}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} ih \\ r \end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\begin{matrix} ik \\ r \end{matrix}\right\}+\sum_{l}^{0\ldots3}\left[\left\{\begin{matrix} ih \\ l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lk \\ r \end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lh \\ r \end{matrix}\right\}\right],$$

che legano i simboli riemanniani di prima a quelli di seconda specie, e questi ai simboli di Christoffel (pure di seconda specie), si riconosce immediatamente che le (8) equivalgono a

$$G_{ik}=\sum_{h}^{0\ldots3}\{ih,hk\}=$$
$$=\sum_{h}^{0\ldots3}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} ih \\ h \end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\begin{matrix} ik \\ h \end{matrix}\right\}\right]+\sum_{hl}^{0\ldots3}\left[\left\{\begin{matrix} ih \\ l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} kl \\ h \end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} lh \\ h \end{matrix}\right\}\right]. \tag{8'}$$

[1] Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 72.

L'invariante lineare del sistema doppio G_{ik}

$$G = \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)}\, G_{ik} \tag{9}$$

si dirà *curvatura media* del nostro ds^2 (1).

Ciò posto, le equazioni gravitazionali di Einstein sono:

$$G_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\, G = -\varkappa T_{ik}\,, \tag{10}$$

dove $\varkappa$ dipende dalla costante f di attrazione universale e da c a norma della formula

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4}\,. \tag{11}$$

Osservo incidentalmente che si può verificare l'omogeneità dei due membri delle (10), immaginando di riferirsi a parametri $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3$ tutti omogenei tra loro, per es. lunghezze, come sono (pei ds^2 euclidei) le y definite dalle posizioni (4). I coefficienti g_{ik} sono allora dei puri numeri, e i primi membri hanno manifestamente le dimensioni l^{-2}. D'altra parte tutti i T_{ik} (sforzi specifici a meno di fattori numerici, ecc.) hanno in questo caso le stesse dimensioni, e precisamente $m l^{-1} t^{-2}$. Si ha poi

$$[f] = m^{-1}\, l^3\, t^{-2} \quad , \quad [\varkappa] = m^{-1}\, l^{-1}\, t^2\,,$$

sicchè anche ai secondi membri spettano effettivamente le dimensioni l^{-2}.

7. Giustificazione formale desunta dalle identità di Bianchi. — Le derivate covarianti dei simboli di Riemann sono legate da relazioni notevolissime dovute al Bianchi (2), che si possono compendiare nella formula

$$g_{ij,hkl} + g_{jl,hki} + g_{li,hkj} = 0 \qquad (i\,, j\,, h\,, k\,, l = 0\,, 1\,, 2\,, 3),$$

ovvero, per ben note proprietà dei simboli di Riemann, nella formula equivalente

$$g_{ij,hkl} + g_{il,hkj} - g_{lj,hki} = 0\,.$$

Moltiplichiamo per $\frac{1}{2}\, g^{(kl)}\, g^{(jh)}$ e sommiamo rispetto a $k\,, l\,, j\,, h$, avendo cura di scambiare nel secondo termine (a somma eseguita) j con l e h con k. Questo secondo termine diviene così identico al primo, e risulta

$$\sum_{0}^{3}{}_{kljh}\, g^{(kl)}\, g^{(jh)}\, g_{ij,hkl} - \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{kljh}\, g^{(kl)}\, g^{(jh)}\, g_{lj,hki} = 0 \qquad (i = 0\,, 1\,, 2\,, 3).$$

D'altra parte la derivazione covariante delle (8) — ricordando il lemma

(1) Tale designazione è ovviamente desunta dal significato geometrico che spetterebbe a G, qualora si trattasse di un ds^2 definito positivo.

(2) Cfr. loc. cit., pag. 351.

di Ricci che i coefficienti della forma fondamentale hanno derivata covariante nulla — porge

$$G_{ikl} = \sum_{0}^{3}{}_{jh} g^{(jh)} g_{ij,hkl} ;$$

mentre, dalla espressione (9) di G, che può essere scritta

$$G = \sum_{0}^{3}{}_{kl} g^{(kl)} G_{lk} ,$$

derivando covariantemente, si trae

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = G_i = \sum_{0}^{3}{}_{kl} g^{(kl)} G_{lki} = \sum_{0}^{3}{}_{kljh} g^{(kl)} g^{(jh)} g_{ij,hki} .$$

Le ricavate combinazioni delle identità di Bianchi divengono con ciò

$$\sum_{0}^{3}{}_{kl} g^{(kl)} G_{ikl} - \frac{1}{2} G_i = 0 \qquad (i = 0 , 1 , 2 , 3). \tag{12}$$

Esse contengono la giustificazione delle equazioni gravitazionali (10), dal lato matematico. Ed ecco perchè. I secondi membri delle (10) costituiscono un sistema doppio a divergenza nulla (¹). Se si richiede che il sistema (10) sia completo [cioè che nessuna condizione sia imposta al ds^2 indipendentemente dalle circostanze esteriori riassunte nelle T_{ik}], bisogna che sia identicamente nulla anche la divergenza dei primi membri, ossia del sistema

$$G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G .$$

Questo appunto esprimono le equazioni (12).

8. Tensore gravitazionale o inerziale – Generalizzazione del principio di d'Alembert. — Posto per brevità

$$A_{ik} = \frac{1}{\varkappa} \left\{ G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G \right\} , \tag{13}$$

le equazioni gravitazionali (10) si scrivono

$$T_{ik} + A_{ik} = 0 \qquad (i , k = 0 , 1 , 2 , 3) \tag{10'}$$

(¹) Infatti le T_{ik} includono il contributo di tutti i fenomeni che si svolgono nel posto e nell'istante considerato (gravitazione a parte). Si tratta comunque di un sistema isolato nel senso ordinario della parola. Debbono perciò annullarsi, per ogni sua porzione elementare, forza e potenza.

Interpretiamovi le A_{ik} come componenti di un tensore energetico dovuto all'ambiente spaziale e temporale, cioè dipendente esclusivamente dai coefficienti del ds^2. Un tale tensore si potrà a egual titolo denominare *gravitazionale* oppure *inerziale* (1), poichè dal ds^2 dipendono simultaneamente gravitazione ed inerzia. Le (10′) dànno luogo in conformità al seguente enunciato:

La natura del ds^2 è sempre tale da equilibrare ogni azione meccanica, nel senso che si annulla identicamente la somma dei due tensori energetico ed inerziale.

Vien fatto naturalmente di riavvicinare un tale enunciato al principio di d'Alembert « le forze perdute (cioè forze direttamente applicate e forze di inerzia) si fanno equilibrio ». L'equilibrio espresso dalle (10′) è proprio ciò che si può concepire di più completo sotto l'aspetto meccanico, venendo ad annullarsi non soltanto la forza totale applicata ad ogni singolo elemento, ma altresì (col tener conto dell'inerzia pel tramite delle A_{ik}) sforzi, flusso e densità di energia.

Ben si intende che questa assenza assoluta di entità meccaniche concerne i sistemi isolati. Se nel campo di un tale sistema si introduce ad esempio un po' di materia (e si suppone per semplicità trascurabile la conseguente modificazione del campo), si ha sulla materia addizionale un complesso di azioni esterne provenienti dal sistema. Nel caso schematico del punto materiale, queste si riassumono in una legge di moto (geodetica rispetto al ds^2 quadridimensionale), che include in particolare l'ordinaria dinamica di un punto sottoposto a forze conservative.

Va notato che le equazioni fondamentali di Einstein, qui riattaccate al principio di d'Alembert, furono già, da Einstein stesso e, in modo più completo, da Lorentz e da Hilbert (2), fatte discendere dalla variazione (debitamente intesa) di un unico integrale, rimanendo così esteso alla nuova meccanica anche il principio di Hamilton.

9. Equivoco di Einstein concernente il tensore gravitazionale. — Ricordo, per quanto possa essere superfluo, che da ogni sistema covariante doppio A_{ik} si ottiene immediatamente un sistema misto $A_i^{(j)}$ (covariante rispetto all'indice i e contravariante rispetto all'indice j), ponendo

$$A_i^{(j)} = \sum_0^3{}_k \, g^{(jk)} A_{ik} \quad . \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3).$$

Ne consegue che, per individuare il tensore gravitazionale con referenza a

(1) Cfr. per es. W. De Sitter, *On the relativity of rotation in Einstein's theory*, Proc. of K. Ak. van Wet. te Amsterdam, vol. XIX, 1916, pag. 530 (in nota).

(2) Cfr. per es. le pp. 707-709 del rapporto di De Sitter, *On Einstein's theory of gravitation.....*, Monthly Notices, vol. LXXVI, 1916.

determinate variabili. è indifferente assegnare gli elementi A_{ik} ovvero le loro combinazioni lineari $A_i^{(j)}$. Ciò premesso, veniamo alle espressioni esplicite proposte da Einstein [1] per le $A_i^{(j)}$ e da lui designate con $\sqrt{-g}\,t_i^j$ (g discriminante del ds^2).

Esse sono

$$(14) \qquad \sqrt{-g}\,t_i^j = \frac{1}{2}\left\{ G^* \varepsilon_{ij} - \sum_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_j^{(hk)}} g_i^{(hk)} \right\} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3),$$

dove ε_{ij} rappresenta al solito lo zero o l'unità secondochè i due indici sono distinti o coincidono; $g_j^{(hk)}$ sta per $\frac{\partial g^{(hk)}}{\partial x_j}$; il sommatorio $\sum_0^3{}_{hk}$ va esteso a tutte le combinazioni con ripetizione degli indici h e k; infine la funzione

$$(15) \qquad G^* = -\sum_0^3{}_{ik} g^{(ik)} \sum_0^3{}_{hl} \left[\begin{Bmatrix} ih \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kl \\ h \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} lh \\ h \end{Bmatrix} \right]$$

deve intendersi (come è ovviamente lecito) ridotta a dipendere dai soli argomenti $g^{(hk)}$, $g_j^{(hk)}$, prima di sottoporla a derivazione parziale rapporto a questi ultimi.

La inattendibilità delle posizioni (14) dal punto di vista matematico si constata agevolmente. Basta per es. ricavarne l'espressione che dovrebbe avere l'invariante lineare, cioè

$$\sqrt{-g} \sum_0^3{}_i t_i^i = \frac{1}{2}\left\{ 4 G^* - \sum_0^3{}_i \sum_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} \right\}.$$

Siccome G^*, a norma della (15) è quadratica omogenea nei simboli di Christoffel e quindi anche nelle $g_i^{(hk)}$, così, in virtù del teorema di Eulero,

$$\sum_0^3{}_i \sum_0^3{}_{hk} \frac{\partial G^*}{\partial g_i^{(hk)}} g_i^{(hk)} = 2 G^*,$$

e *l'invariante in questione dovrebbe ridursi a* G^*.

Ora è ben noto [2] che *non* esistono invarianti differenziali del 1° ordine, intrinseci, cioè formati esclusivamente coi coefficienti del ds^2 e loro derivate prime, come lo è G^*. Tanto basta a renderè, almeno in generale, inammissibile la forma del tensore gravitazionale assunta da Einstein. Questi del

[1] Dapprima con referenza a speciali variabili; allargandone poi la validità; e da ultimo attribuendo loro carattere generale. Cfr. in particolare la recente Nota: *Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Ak. der Wiss., 1916, pp. 1111-1116.

[2] Veggasi ad es. Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Mathematische Annalen, B. 54, 1900, pag. 162.

resto già ne aveva risentito un qualche disagio, specie quando (1), dopo avere con geniale semplicità tratteggiata la teoria delle onde gravitazionali, fu condotto al risultato inattendibile che anche onde *spontanee* dovrebbero di regola dar luogo a dispersione di energia per irraggiamento.

« Siccome questo — sono sue parole — non dovrebbe presentarsi « in natura, così appare verosimile che intervenga la teoria dei quanti a « modificare non soltanto l'elettrodinamica di Maxwell, ma anche la nuova « teoria della gravitazione ».

In realtà non c'è bisogno di arrivare ai quanti. Basta correggere l'espressione formale del tensore gravitazionale nel modo qui esposto. Rimane allora *a priori* esclusa l'eventualità di imbattersi in conseguenze non rispondenti alla intuizione fisica, sia che si tratti di onde libere o d'altro fenomeno *puramente* gravitazionale. Infatti, a norma delle (10′), o, se si vuole, del principio di d'Alembert generalizzato, quando si annulla il tensore energetico T_{ik}, lo stesso deve avvenire per il tensore gravitazionale A_{ik}, il che implica assoluta assenza sì di sforzi, che di flusso, o anche di semplice localizzazione dell'energia.

Astronomia. – *Osservazioni della nuova cometa Mellish* ≡ 1917 *a*. Nota del Socio E. Millosevich.

Sembra che l'astro sia stato scoperto dal sig. Mellish, Yerkes Observatory, Williams Bay, probabilmente il 20 marzo.

Una piccola efemeride, calcolata a Copenaghen, sopra elementi difettosi è di grossolana approssimazione.

L'astro è lucente; il nucleo è fra 6ta e 7ma grandezza, la testa misura circa 0′,6 e designasi una lieve codetta; suppongo che possa diventare un bell'oggetto, ma nulla devesi congetturare senza la conoscenza pur approssimata delle distanze.

Io trovai l'astro il 25, e feci le seguenti quattro posizioni:

	t. m. R. C. R.	α app.	δ app.	Stelle di riferimento
	h m s	h m s	o ′ ″	
1917 marzo 25	7 36 19	2 6 45.28 (9.656) ;	+ 16 3 38.0 (0.737)	1
» » 27	7 4 25	2 4 38.13 (9.651) ;	+ 16 44 26.6 (0.721)	2
» » 29	6 58 53	2 1 40.23 (9.655) ;	+ 17 23 26.7 (0.721)	3
» » 30	7 9 1	1 59 45.26 (9.659) ;	+ 17 41 30.7 (0.732)	4

(1) Nella Nota già citata al principio.

1.	Berl A	612;	1917.0;	2	6	22.15	;	+15	59	38.2;	Rid. al l. a	: +0.60; +5.6
2.	»	606	» ;	2	4	49.21	;	+16	50	7.6;	»	: +0.58; +5.7
	($\mu - \mu'$)											
3.	»	593	» ;	2	1	10.73	;	+17	15	15.9;	»	: +0.57; +5.6
4.	»	587	» ;	1	59	9.32	;	+17	51	18.5;	»	: +0.57; +5.5
	(senza μ e μ')											

Il moto dell'astro verso Ovest aumenta e quello verso Nord decresce, donde tende al tramonto in vivo crepuscolo serotino, e fra breve sarà astro del mattino.

Cristallografia. — *Il polimorfismo della dinitrotoluidina* $C_6H_2 . NO_2 . NO_2 . NH_2 . CH_3$ (1) (3) (5) (2). Nota I del Socio E. Artini.

Questa sostanza mi fu affidata per lo studio cristallografico dai professori Körner e Contardi, i quali la ottennero nel corso delle loro ricerche sui trinitroderivati del benzolo e del toluolo, mediante riduzione del trinitrotoluolo α (*tritòlo*) con solfuro ammonico, seguendo il processo che espongo qui, come dai due autori mi fu comunicato.

« Grammi 500 di tritolo, finamente polverizzato, vennero sospesi in gr. 3000 di alcool a 94 %; indi si aggiunse, agitando energicamente mediante un agitatore meccanico, il solfuro ammonico in soluzione acquosa concentrata, nella quantità calcolata per ridurre un solo nitrogruppo. L'introduzione del solfuro era regolata in modo che la temperatura non superasse mai, durante tutto il processo, i 60°. A riduzione finita si distillava l'alcool, e si versava il residuo in molt'acqua (10 litri d'acqua per gr. 500 di tritolo). Il precipitato rimasto indisciolto veniva raccolto su filtro, lavato e cristallizzato da acido cloridrico diluito bollente, affine di separare la dinitrotoluidina dal solfo. Per neutralizzazione della soluzione cloridrica con ammoniaca precipita la toluidina cercata, la quale, ricristallizzata da alcool bollente, fonde a 173°. Evaporando la soluzione acquosa, dalla quale si è separato il prodotto greggio, si ottiene un secondo prodotto, accessorio, che è la nitrotoluilendiamina $C_6H_2 . NO_2 . NH_2 . NH_2 . CH_3$ (1) (3) (5) (2), la quale si purifica assai facilmente con ulteriori cristallizzazioni dall'acqua ».

Le proprietà morfologiche e fisiche della dinitrotoluidina così ottenuta variano considerevolmente, come già il prof. Körner aveva potuto notare, secondo le condizioni nelle quali essa vien fatta cristallizzare. Lo studio lungo e accurato che ebbi modo di farne, facilitato grandemente dalla cospicua quantità di sostanza messa gentilmente a mia disposizione dallo stesso prof. Körner, mi permise di riconoscere per questa sostanza ben quattro diverse fasi cristalline; tre di queste (δ, γ, β) che più o meno facilmente

si ottengono e si conservano alla temperatura ordinaria, furono da me studiate morfologicamente e fisicamente; mentre questo non mi è riuscito con la quarta (α), ch'è quella che si ottiene per fusione, ed è stabile solo fra 148° e 173° C.

Esporrò prima i risultati delle osservazioni fatte sopra ognuna delle fasi, o modificazioni, prese singolarmente; dirò poi della relativa stabilità e delle trasformazioni dell'una nell'altra.

Fase δ. — Si ottiene facilmente per evaporazione lenta di una soluzione satura a freddo in miscela di etere ed alcool.

Sistema rombico (*cl. bipiramidale*?).

$a:b = 0.7935:1$.

Forme osservate:

$\{010\}, \{001\}, \{110\}$.

I cristalli sono prismatici, per lo più sensibilmente allungati, fino ad essere aghiformi, secondo la direzione dell'asse verticale. Alle estremità sono terminati soltanto da una faccetta di base, per modo che non fu possibile determinare il valore del parametro fondamentale sull'asse z.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(110).(1$\bar{1}$0)	10	76°42′ - 77°9′	76°52′	*
(110).($\bar{1}$10)	2	102.53 - 103.6	102.59 ½	103°8′
(010).(110)	17	51.12 - 52.1	51.36	51.34
(110).(001)	4	89.48 - 90 10	89.58 ½	90.

Sfaldatura facilissima e perfetta secondo $\{001\}$.

La bisettrice dell'angolo acuto degli assi ottici, negativa, coincide, per tutti i colori, con l'asse z: ma il piano degli A. O. per la luce rossa è incrociato con quello per la luce azzurra; e precisamente:

per la luce di Li il P. A. O. è $\{010\}$; l'angolo degli A. O. nell'aria è piuttosto piccolo;

per la luce di Na il P. A. O. è $\{100\}$; l'angolo degli A. O. è piccolissimo;

per la luce di Tl il P. A. O. è ancora $\{100\}$; l'angolo degli A. O. è abbastanza grande.

La sostanza appare dunque uniassica per un colore giallo aranciato.

La birifrazione è fortissima. Il valore di α per la luce di Na è di poco superiore all'indice di rifrazione dell'olio di vaselina, ($n = 1.476$). Il colore d'insieme della sostanza, a luce riflessa, quando sia perfettamente pura, è un bellissimo giallo citrino.

Il pleocroismo è abbastanza sentito: all'asse y corrisponde il massimo assorbimento (giallo di orpimento, carico); minore è l'assorbimento per le direzioni degli altri due assi ($x = z$ = giallo citrino chiaro, leggermente traente al verdolino).

P. sp. = 1.524 (media di due determinazioni fatte con la soluzione di Klein: I^a. p. sp. = 1.523; II^a. p. sp. = 1.525).

Fase γ. — Si ottiene con tutta facilità per evaporazione da soluzioni sature a freddo in etere acetico o acetone, puri o misti con alcool.

Sistema triclino, cl. pinacoidale:
$a:b:c: = 0.8389:1:2.1764$

A = 86°.33 $^1/_2{}'$	α = 93°.26′
B = 91 .2	β = 89 .00
C = 90 .30 $^1/_2$	γ = 89 .33 .

Forme osservate:

{001}, {111}, {113}, {1$\bar{1}$1}, {1$\bar{1}$3}, {1$\bar{1}$5}, {$\bar{1}$11}, {$\bar{1}\bar{1}$1}, {$\bar{1}\bar{1}$3}.

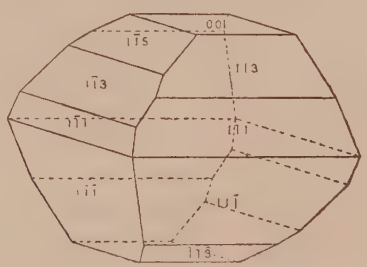


Fig. 1.

L'abito è vario: talora i cristalli sono tozzi, del tipo rappresentato nella fig. 1; altre volte sono invece marcatamente allungati secondo lo spigolo [11$\bar{1}$. 1$\bar{1}\bar{1}$].

Le facce della base sono ordinariamente nitidissime; quelle delle altre forme, pure di solito assai brillanti, sono sempre striate, e le immagini che esse riflettono al goniometro quasi costantemente multiple, per la frequenza di facce vicinali; così che la scelta è spesso difficile e incerta. A questo è dovuta la discordanza, abbastanza sensibile, tra le misure delle forme scelte come fondamentali, e quelle delle altre, a simbolo più complicato.

Abbastanza frequente, specie nei cristalli allungati, e in modo particolare nei meno perfetti, è la geminazione secondo (010); per lo più si tratta di geminazione polisintetica, a lamelle alterne, come fedelmente mostra la fig. 2; caratteristico l'angolo, di circa 7°, tra le basi dei due individui. Il piano di contatto è lo stesso piano di geminazione, come mostra la figura, e come si rileva dalla osservazione microscopica delle lamelle basali.

Facili sono ad ottenersi deformazioni omogenee per azioni meccaniche: nelle lamine basali geminate, per dolce compressione del polpastrello di un dito contro ad un portaoggetti, si riesce p. es. spesso a far scomparire la geminazione, ottenendo una lamina perfettamente omogenea.

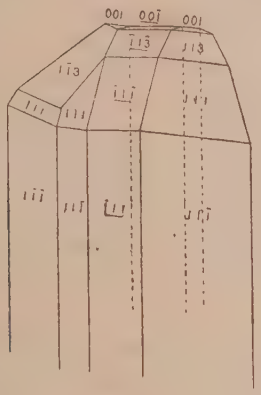


Fig. 2.

Nei cristalli imperfetti, scheletriformi, tabulari secondo la base, che si ottengono per raffreddamento rapido da soluzioni in alcool bollente, si nota invece spesso un altro modo di geminazione, che mi sembra stare al precedente come la legge del periclino sta a quella dell'albite nei plagioclasî: le basi coincidono; il piano di contatto è obliquo alla base, e parallelo alla diagonale lunga (y) delle lamine basali: il numero delle lamelle di geminazione è variabilissimo, spesso anche molto grande. Vedremo poi, più avanti, come simile geminazione polisintetica si possa ottenere anche artificialmente.

Anche per gli angoli di geminazione secondo (010) si nota una discrepanza sentita e sistematica tra misura e calcolo, come risulta dagli ultimi valori esposti nella tabella.

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(111).(001)	6	71.58′ - 72.18′	72.9′	*
(1$\bar{1}$1).(001)	7	75.37 - 76.48	76.22	*
($\bar{1}$11).(001)	6	70.45 - 71.4	70.52	*
($\bar{1}\bar{1}$1).(001)	7	73.50 - 75.28	74.47	*
(111).(1$\bar{1}$1)	6	76.14 - 76.42	76.31	*
(111).($\bar{1}$11)	4	93.6 - 93.15	93.10	93.12 1/2′
(1$\bar{1}$1).($\bar{1}\bar{1}$1)	5	95.36 - 95.51	95.44	95.49
($\bar{1}$11).($\bar{1}\bar{1}$1)	6	75.40 - 75.56	75.46	75.50 1/2
(113).(001)	5	48.1 - 48.14	48.6	47.30 1/2
(1$\bar{1}$3).(001)	9	49.48 - 51.3	50.37	50.14
($\bar{1}\bar{1}$3).(001)	6	49.40 - 49.53	49.46	49.6
(113).(1$\bar{1}$3)	5	58.21 - 58.43	58.34	57.57
(1$\bar{1}$3).($\bar{1}\bar{1}$3)	4	72.5 - 72.20	72.11	71.29
(1$\bar{1}$5).(001)	3	35.32 - 35.55	35.46	35.7 1/2
(001).(00$\underline{\bar{1}}$)	3	7.21 - 7.35	7.28	6.53
(111).($\underline{\bar{1}1\bar{1}}$)	3	1.36 - 1.50	1.44	0 57
(113).($\underline{\bar{1}1\bar{3}}$)	1	—	4.23	3.31

Sfaldatura facilissima e perfetta secondo {001}.

Le bisettrici acute, negative, del piano degli assi ottici sono quasi normali alla base; i piani degli A. O. per i diversi colori, abbastanza sensibilmente dispersi, non sono molto inclinati (meno per la luce azzurra, più per la rossa) sul piano di (100). Anche otticamente, dunque, questa fase è distintamente pseudorombica, così come è morfologicamente. La direzione di estinzione negativa sulla (001) fa con l'asse x gli angoli seguenti:

8° per la luce azzurra
11° » » gialla
16° » » rossa.

Sulle lamine che mostrano la geminazione secondo (010) la inclinazione tra le estinzioni negative dei due individui è, naturalmente, di 16° per la luce azzurra, 22° per la gialla, 32° per la rossa. Questa forte dispersione, la quale fa sì che a luce bianca le lamine di sfaldatura basale non appariscano mai estinte per tutti i colori, permette di riconoscere tosto una laminetta di questa modificazione triclina da una, pur tanto simile per tutto il resto, della modificazione rombica rossa (β), della quale sarà detto più avanti. La dispersione asimmetrica è del resto nettamente riconoscibile anche nella figura di interferenza a luce bianca.

L'angolo tra gli assi ottici è piccolo; la dispersione degli assi è forte: $\varrho < v$. In una limpida laminetta di sfaldatura basale misurai:

$$2E_a = 36°.30'\ \text{(luce rossa)}$$
$$45\ .1\ \text{(» gialla)}$$
$$53\ .10\ \text{(» azzurra).}$$

Il colore d'insieme a luce riflessa è per questa fase un bellissimo giallo arancione vivo. Sulla base il pleocroismo è assai evidente: all'estinzione negativa (diagonale corta, all'incirca, della sezione romba basale) corrisponde una tinta aranciata piuttosto chiara; alla positiva (diagonale lunga) un rosso arancione molto più carico.

P. sp. = 1.497 (1)
P. M. = 197.086
V. = 131.65

$\chi = 3.4940$
$\psi = 4.1650$
$\omega = 9.0648$.

Fase β. — Si forma spesso, insieme con la γ, da soluzioni in etere acetico o in acetone, alla temperatura ordinaria; si ottiene pure mediante lentissimo raffreddamento di soluzione alcoolica bollente.

Sistema rombico, cl. bipiramidale:
$a:b:c = 0.8557:1:1.1119$.

Forme osservate:
{001}, {110}, {111}, {112}; incerta: {441}.

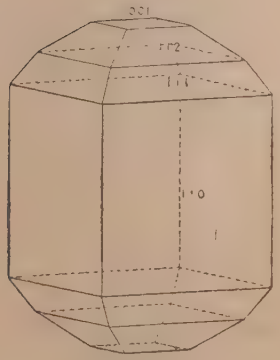


Fig. 3.

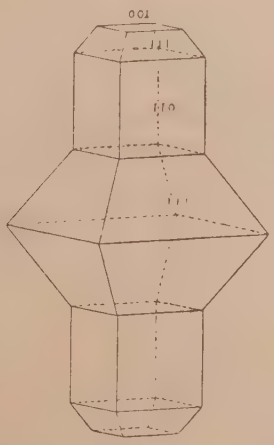


Fig. 4.

Vario è lo sviluppo delle diverse forme; l'abito più comune è quello rappresentato dalla fig. 3; la {112} però manca spesso completamente. Fre-

(1) Media di due determinazioni fatte con la soluzione di Klein su limpidissimi cristallini: I. p. sp. = 1.496; II. p. sp. = 1.498.

quenti anche i concrescimenti paralleli di individui di vario tipo, come p. es. quello della fig. 4, dove si vede un cristallo a tipo bipiramidato continuarsi alle due estremità dell'asse verticale in due più sottili individui prismatici.

Le facce della base e delle bipiramidi sono ordinariamente abbastanza nitide e piane: quelle del prisma verticale invece presentano spesso una forte poliedria, e sono striate orizzontalmente, o profondamente rigate per combinazione alternante con {111}, per modo che ben di rado si prestano a misure esatte. Assai dubbia è la forma {441}, osservata in un cristallo come smussamento dello spigolo [110 . 111].

Spigoli misurati	Angoli osservati			Angoli calcolati
	N.	Limiti	Medie	
(111) . (001)	13	59°.29′ - 59°.59′	59°.41′	*
(111) . (1$\bar{1}$1)	7	68.12 - 68.26	68.17	*
(111) . ($\bar{1}$11)	5	81.35 - 82.23	81.56	81°.59′
(111) . (110)	2	30.12 - 30.36	30.24	30.19
(110) . (1$\bar{1}$0)	4	80 50 - 81.5	80 57	81.6
(112) . (001)	6	40.18 - 41.5	40 35	40.32
(112) . (1$\bar{1}$2)	2	49.53 - 49.55	49.54	49.59
(112) . ($\bar{1}$12)	2	59.5 - 59.6	59.5 1/2	59.11
(441) . (001)	1	—	81.7	81.41

Sfaldatura facilissima e perfettissima secondo {001}.

Il piano degli assi ottici è parallelo a {100}. La bisettrice acuta, negativa, è normale a {001}; il relativo indice di rifrazione α, confrontato con quello dell'olio di vaselina, ha un valore $\leqq$ di questo, che è 1.476. La birifrazione è fortissima. L'angolo degli assi ottici è piccolo, con forte dispersione: $\varrho < v$. In una bella lamina di sfaldatura basale misurai:

$$2E_a = 32°.47' \text{ (luce rossa)}$$
$$42\ .59 \text{ (» gialla)}$$
$$52\ .21 \text{ (» azzurra).}$$

Il colore d'insieme, a luce riflessa, è per questa fase un bel rosso aurora: cioè un poco più rosso e più carico di quello della fase γ, ma ad esso abbastanza simile perchè ad un osservatore non pratico possa sfuggire la differenza. Il pleocroismo è distinto: secondo gli assi x e z (diagonale corta della sezione basale e allungamento prismatico) l'assorbimento è minore, e il colore è un arancio vivo; secondo y (diagonale lunga) l'assorbimento è più forte, con una tinta rosso-aurora intensa. In lamine basali molto sottili

i due colori sono, naturalmente, più chiari, e cioè, rispettivamente, giallo chiaro e aranciato vivo.

P. sp. = 1.495 (1)
P. M. = 197.086
V. = 131.83

$\chi = 4.4279$
$\psi = 5.1747$
$\omega = 5.7535$.

Relazioni morfologiche e fisiche tra la fase γ e la β.

La rassomiglianza di aspetto delle due fasi non è soltanto esterna, ma ha le sue basi in profonde analogie morfologiche e fisiche. Anzitutto la fase γ triclina è evidentissimamente pseudorombica; se poi in essa si divide per 2 il parametro fondamentale sull'asse z, il rapporto parametrico diventa:

$$a:b:c = 0.8389:1:1.0882$$

e gli assi topici:

$$\chi = 4.4022 \quad ; \quad \psi = 5.2476 \quad ; \quad \omega = 5.7105 ;$$

valori molto vicini agli omologhi della fase β rombica, che riporto qui per confronto:

$$a:b:c = 0.8557:1:1.1119$$

$$\chi = 4.4279 \quad ; \quad \psi = 5.1747 \quad ; \quad \omega = 5.7535 .$$

Quanto ai simboli delle forme, per accordare le due fasi è forse meglio, inversamente, moltiplicare per due il parametro fondamentale sull'asse z della modificazione rombica; allora vediamo che nell'una (γ) la serie di complicazione è $\{111\} - \{113\} - \{115\}$, mentre nell'altra ($\beta$) è $\{112\} - \{114\}$. Questa è la causa dell'apparente mancanza di analogie angolari tra le due.

Notevolissima è poi la presenza in entrambe di una perfetta e facilissima sfaldatura basale, e la grandissima rassomiglianza nelle proprietà ottiche: salva la sensibile dispersione dei piani degli assi ottici nella triclina, per tutto il resto che tocca alla orientazione ottica, al valore dell'angolo degli assi ottici, alla dispersione di questi e al pleocroismo, le due fasi non potrebbero presentare più distinte e più chiare analogie. Anche il p. sp. è quasi identico, essendo appena percettibile la differenza in meno per la fase stabile a più alta temperatura.

Altra prova delle relazioni che corrono tra le due modificazioni, malgrado il diverso grado di simmetria, si può trovare nelle frequenti associa-

(1) Due determinazioni, in soluzione di Klein, con risultati identici.

zioni regolari di cristalli dell'una su cristalli dell'altra. La norma di queste associazioni è semplicissima: i due cristalli hanno in comune la base, e approssimativamente paralleli i due assi x e y; dico approssimativamente perchè mentre $x \wedge y = 90°$ nella β, è $= 89°.33'$ nella γ. Anche il contorno rombico delle due basi è quasi isogono: si ha infatti $[111.001] \wedge [1\bar{1}1.001] = 81°.6'$ nella rombica e $= 79°.59'$ nella triclina. Talune volte i due cristalli sono entrambi allungati; l'uno, il rombico, secondo il prisma verticale; l'altro, il triclino secondo $[\bar{1}11.\bar{1}\bar{1}1]$, come si vede nella fig. 5, nella quale l'individuo inferiore è rombico (β) e il superiore è triclino (γ). La precisione di questa associazione, senza essere grandissima, è tuttavia sufficiente, come risulta dai seguenti angoli (i simboli sottolineati sono quelli spettanti alle facce del cristallo triclino):

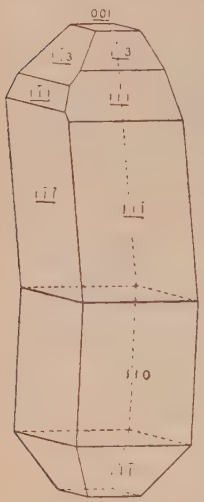


Fig. 5.

Spig. mis.	Ang. osserv.	Ang. calcol.
$(110).(11\underline{\bar{1}})$	$15°.3'$	$15°.13'$
$(11\bar{1}).(11\underline{\bar{1}})$	16.13	15.6
$(\bar{1}1\bar{1}).(\underline{\bar{1}11})$	49.32	49.27
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}).(\underline{\bar{1}\bar{1}1})$	44.57	45.32

Nelle soluzioni in etere acetico e acetone capita non di rado che in un primo tempo si formino dei grossi cristalli della fase β, con abito bipiramidato; su questi poi, in un secondo tempo, crescono, in associazione regolare come sopra fu detto, varî sottili individui della fase γ, il cui allungamento è evidentemente obliquo rispetto all'asse verticale dell'individuo-sostegno. La differenza nella intensità del colore tra le due modificazioni è così poco accentuata, che ci vuole una certa attenzione per notare che questi « geminati » sono in realtà associazioni di due diverse fasi cristalline.

Batteriologia. — *Ricerche batteriologiche sulle psicosi pellagrose.* Memoria del Socio G. Tizzoni.

Fisiologia. — *Sul ricambio dei muscoli nelle diverse condizioni meccaniche delle loro contrazioni.* Memoria del Corrisp. G. Galeotti.

I due precedenti lavori saranno pubblicati nei volumi delle *Memorie*.

Matematica. — *Solution d'un problème remarquable relatif à la nouvelle Table de diviseurs des nombres.* Nota di Ernesto Lebon, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Soient

$$B = 30\,030 \quad \text{et} \quad B^2 = 901\,800\,900$$

la base adoptée et la limite des nombres dont la *nouvelle Table* donne la composition.

Lorsque l'on divise par B un nombre N premier avec B, on obtient un quotient par défaut α, appelé *caractéristique*, et un reste par défaut I, appelé *indicateur*, de sorte que

$$N = B\alpha + I, \quad \text{ou} \quad N = (\alpha\,;\,I) \tag{1}$$

en prenant B pour base du système de numération.

Si l'on prend le quotient par excès, on a

$$N = B\alpha_e - I, \quad \text{ou} \quad N = (\alpha_e\,;\,-I). \tag{2}$$

L'ancienne Table devait renfermer 5760 Tableaux désignés chacun par son indicateur, les caractéristiques, dans chaque Tableau I, allant de B à $B^2 - 1$.

La *nouvelle Table* (1) comprend

1° le Tableau des indicateurs, avec les facteurs premiers des indicateurs composés;

2° le Tableau des produits

$$II' = Bk + 1 \quad \text{ou} \quad II' = k\,;\,1 \quad \text{ou} \quad II' \equiv 1 \pmod{B} \tag{3}$$

de deux indicateurs, la caractéristique k étant par défaut;

3° le Tableau 1, dont la première partie renferme les caractéristiques par défaut des nombres composés allant de 1 à $B - 1$, dont la seconde partie renferme des caractéristiques par défaut allant de B à $B^2 - 1$, chaque caractéristique étant suivie des facteurs premiers des nombres ayant cette caractéristique;

(1) Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, t. 159, 5 octobre 1914; t. 160, 14 juin 1915; t. 162, 6 mars 1916; t. 163, 11 septembre 1916; t. 164, 19 mars 1917.

4° la première partie du Tableau — 1 qui renferme les caractéristiques par excès des nombres composés allant de 2 à B.

2. Soit d'abord le nombre $(\alpha\,;\mathrm{I})$.

On cherche le plus grand diviseur commun Δ à I et à α.

Si $\Delta > 1$, on divise par Δ le nombre $(\alpha\,;\mathrm{I})$ et on obtient ainsi le nouveau nombre $\delta\,;\mathrm{I}_\delta$.

Quand $\mathrm{I}_\delta = 1$, le Tableau 1 fait connaître si le nombre $\delta\,;\mathrm{I}_\delta$ est composé et permet de trouver ses facteurs premiers.

Quand $\mathrm{I}_\delta \neq 1$, on est conduit à chercher la composition d'un nombre pour lequel δ et I_δ sont premiers entre eux ; on est donc amené à se servir d'un autre Tableau I_δ.

Ensuite on écrit

$$\mathrm{N} = (\alpha_e\,;\ -\mathrm{I}_e), \qquad \text{où} \quad \alpha_e = \alpha + 1 \qquad \text{et} \quad \mathrm{I}_e = \mathrm{B} - \mathrm{I}$$

et l'on opère comme précédemment.

3. Méthode. — 1°. On amène dans le Tableau 1 un nombre $(\alpha\,;\mathrm{I})$, α et I étant premiers entre eux, en multipliant les deux membres de l'égalité (1) par un indicateur I′ tel que l'égalité (3) soit satisfaite.

La caractéristique par défaut du nombre N I′, *substitué à* N *est*

$$\chi = \mathrm{I}\,\alpha + k. \tag{4}$$

2°. On amène de même dans le Tableau — 1 un nombre $(\alpha_e\,;\ -\mathrm{I})$, α_e et I étant premiers entre eux.

La caractéristique par excès du nombre N I′, *substitué à* N *est*

$$\chi_e = \mathrm{I}'\,\alpha_e - k. \tag{5}$$

3°. On amène dans le Tableau 1 le nombre $(\alpha_e\,;\ -\mathrm{I})$ en multipliant par $(\mathrm{B} - \mathrm{I}')$ les deux membres de l'égalité (2).

La caractéristique par défaut du nombre N $(\mathrm{B} - \mathrm{I}')$, *substitué à* N *est*

$$\chi = (\mathrm{B} - \mathrm{I}')\,\alpha_e + k - \mathrm{I}. \tag{6}$$

Evidemment, les caractéristiques χ et χ_e sont $< \mathrm{B}^2$.

4. Problème. — *Ayant une caractéristique* χ *ou* χ_e, *reconnaître à quelles conditions elle est la caractéristique d'un nombre qui soit le produit de deux nombres appartenant*

1° *tous deux au Tableau* 1,

2° *tous deux au Tableau* — 1,

3° *l'un au Tableau* 1 *et l'autre au Tableau* — 1,

les caractéristiques dans ces deux Tableaux etant inférieures à B.

Les solutions de ce problème sont très remarquables, car elles permettent d'obtenir seulement avec les premières parties du Tableau 1 et du Tableau — 1, la composition de beaucoup de nombres dont les caractéristiques ont été obtenues par la MÉTHODE (n° 3).

Ces solutions pourront servir tant que l'on ne possédera que ces premières parties.

Les solutions du 1° et du 2° de ce problème se trouvant dans les « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences » (t. 162, 6 mars 1916; t. 164, 19 mars 1917), ce travail contient seulement la solution du 3°.

5. SOLUTION DU 3° (n° 4). — Soient deux nombres $(\varepsilon\,;1)$ et $(\varepsilon_e\,;-1)$ appartenant respectivement au Tableau 1 et au Tableau — 1.

Le produit de ces deux nombres est dans le Tableau — 1 et il a pour caractéristique

$$K\varepsilon\varepsilon_e = B\varepsilon\varepsilon_e - \varepsilon + \varepsilon_e . \tag{7}$$

Supposons que le produit $\varepsilon\varepsilon_e$ soit $< B$.

χ_e désignant une caractéristique $< B^2$ d'un nombre du Tableau — 1, soient q le quotient par défaut $< B$ et ε le reste obtenus en divisant K_e par B. On a

$$\chi_e = Bq + r . \tag{8}$$

Deux cas se présentent pour le second membre de l'égalité (7), savoir:

$$-\varepsilon + \varepsilon_e > 0 \qquad \text{et} \qquad -\varepsilon + \varepsilon_e < 0 .$$

6. PREMIER CAS DE LA SOLUTION DU 3° (n° 4). — Dans le second membre de l'égalité (7), le terme $(-\varepsilon + \varepsilon_e)$ est positif.

Identifiant les égalités (7) et (8), on obtient les deux équations

$$\varepsilon\varepsilon_e = q \quad , \quad \varepsilon_e - \varepsilon = r . \tag{9}$$

Les valeurs des inconnues ε et ε_e résultent d'une équation du second degré; comme elles doivent être entières et positives, il faut que le discriminant soit un carré entier positif.

Sans résoudre l'équation du second degré, on trouve ainsi les valeurs de ε_e et de ε. Il est facile de décomposer, de toutes les manières possibles, q en groupes de deux facteurs entiers positifs. Si la différence de deux facteurs d'un groupe est égal à r, ces deux facteurs sont les valeurs de ε_e et de ε. Le facteur ε se prend dans le Tableau 1 et le facteur ε_e se prend dans le Tableau — 1.

7. *Exemple.* — Soit

$$\begin{aligned} N &= 624\ 677\ 381 \\ &= 20801\ ;\ 23351 \\ &= 20802\ ;\ -6679 \end{aligned}$$

N est amené à NI′ dans le Tableau — 1. On trouve

$$I' = 589 = 19.31\,, \qquad k = 131\,.$$

Par suite

$$\chi_e = 589\,.\,20802 - 131$$
$$= 12\ 252\ 247\,.$$

On obtient

$$q = 408\,, \qquad r = 7$$
$$408 = 17\,.\,24\,, \qquad 24 - 17 = 7$$
$$\varepsilon_e = 24\,, \qquad \varepsilon = 17$$
$$24\,;\,-1 = 31\,.\,67\,.\,347\,, \qquad 17\,;\,1 = 19\,.\,97\,.\,277\,.$$

Comme $I' = 19\,.\,31$, on trouve que

$$N = 67\,.\,97\,.\,277\,.\,347\,.$$

8. A la valeur

$$\chi_e = 12\ 252\ 247$$

conduisent aussi les nombres suivants, dont les indicateurs sont négatifs et, en valeur absolue, $< \frac{1}{2}B$ pour les trois premiers et $> \frac{1}{2}B$ pour les trois derniers:

42 847 907	$(I' = 1427\,,\ k = 1402)$;
122 359 487	$(I' = 3007\,,\ k = 1278)$;
289 029 833	$(I' = 1273\,,\ k = 378)$;
19 825 151	$(I' = 18559\,,\ k = 15252)$;
55 806 913	$(I' = 6593\,,\ k = 4140)$;
56 614 091	$(I' = 6499\,,\ k = 4867)$.

9. Second cas de la solution du 3e (n° 4). — Dans le second membre de l'égalité (7), le terme $(-\varepsilon + \varepsilon_e)$ est négatif. On écrit ainsi l'égalité (8)

$$\chi_e = B\,(q+1) - (B - r)\,. \tag{10}$$

Identifiant les égalités (7) et (10) on obtient les deux équations

$$\varepsilon\varepsilon_e = q + 1\,, \qquad \varepsilon - \varepsilon_e = B - r\,. \tag{11}$$

Sans résoudre l'équation du second degré d'où résulteraient les valeurs de ε et ε_e, on arrive facilement, comme dans le premier cas, à les trouver en décomposant $q+1$ en deux facteurs ε et ε_e dont la différence $\varepsilon - \varepsilon_e$ égale $B - r$. Le facteur ε se prend dans le Tableau 1 et le facteur ε_e se prend dans le Tableau — 1.

10. *Exemple.* — Soit

$$\begin{aligned} N &= 243\ 173\ 083 \\ &= 8097\ ;\ 20173 \\ &= 8098\ ;\ -9857\ . \end{aligned}$$

N est amené en NI′ dans le Tableau — 1. On trouve

$$I' = 27413 = 79\ .\ 347\ , \qquad k = 8998\ .$$

Par suite

$$\begin{aligned} \chi_e &= 27413\ .\ 8098 - 8998 \\ &= 221\ 981\ 476\ . \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} q + 1 &= 7392\ , & B - r &= 284 \\ 7392 &= 24\ .\ 308\ , & 284 &= 308 - 24 \\ \varepsilon &= 308\ , & \varepsilon_e &= 24 \\ 308\ ;\ 1 &= 17\ .\ 71\ .\ 79\ .\ 97\ , & 24\ ;\ -1 &= 31\ .\ 67\ .\ 347\ . \end{aligned}$$

Comme I′ = 79 . 347, on trouve que

$$N = 17\ .\ 31\ .\ 67\ .\ 71\ .\ 97\ .$$

11. J'indiquerai ultérieurement comment la solution précédente du problème du n° 4 peut être étendue au cas où le produit de deux caractéristiques des Tableaux 1 et — 1 varie de B à B^2.

Matematica. — *Un'applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.* Nota di Attilio Vergerio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica terrestre. — *Rettifiche e considerazioni sulla velocità del terremoto del 13 gennaio 1915.* Nota di G. Agamennone, presentata dal Socio E. Millosevich.

Dopo due mie Note (1) intorno a questo memorando terremoto, n'è stata pubblicata un'altra sullo stesso argomento dal chmo prof. G. Grablovitz (2) il quale, pur non avendo potuto conoscere la 2ª delle mie predette pubblicazioni, discute alcuni dati orarî, ne aggiunge altri pochi, difende l'ora d'Ischia contro il dubbio da me sollevato circa la sua attendibilità e poi dichiara poco corretto il procedimento da me adottato pel calcolo della velocità. Ora che è avvenuta la pubblicazione dei bollettini sismici di numerosi altri Osservatorî, ed è quindi reso possibile uno studio meno incompleto sulla propagazione delle onde sismiche, è innanzi tutto vantaggioso l'esame di quei dati pei quali v'è discordanza o rettifica, e infine utile un po' di discussione sulla fondatezza o meno della critica del mio collega.

Per Siena (Osservanza) l'A. riporta un'ora ($7^h\,53^m\,52^s$) (3) notevolmente diversa da quella ($7^h\,53^m\,0^s$) a me comunicata. Da spiegazioni chieste a quell'Osservatorio risulta che l'ora fu, in seguito, rettificata in $7^h\,53^m\,12^s$, e tale fu comunicata all'A. il quale forse lesse 52^s invece di 12^s. Dal sismogramma originale, inviatomi cortesemente, io ho dedotta come più probabile l'ora: $7^h\,53^m\,7^s$; ma dal complesso delle spiegazioni ricevute, appare poco attendibile questo dato orario.

In un supplemento alla sua Nota, l'A. riporta per Catania, attingendola dal Boll. sismico di quell'Osservatorio, un'ora ($7^h\,53^m\,55^s$) abbastanza discorde da quella ($7^h\,54^m\,18^s$) che era stata a me comunicata. Da spiegazioni chieste all'Osservatorio, risulta che l'ora da me pubblicata era espressa in t. l. anzichè in quello dell'E. C. e che era stato dimenticato di prevenirmene.

L'A. assegna a Bologna l'ora: $7^h\,53^m\,35^s$. Io non avevo creduto di utilizzare il dato orario di questa città, sapendo che ivi era in funzione soltanto un sismoscopio. Questa circostanza m'è stata confermata da quell'Osservatorio il quale ha aggiunto che il sismoscopio arrestò l'apposito orologio a $7^h\,53^m\,45^s$ e che al riguardo non venne mai fatta comunicazione

(1) *Il recente terremoto nella Marsica e gli strumenti sismici* (Rend. d. R. Accad. dei Lincei, seduta del 7 febbraio 1915); *Velocità di propagazione del terremoto Marsicano del 13 gennaio 1915* (ivi, seduta del 7 marzo 1915).

(2) *Sul terremoto del 13 gennaio 1915* (ivi, seduta del 21 marzo 1915).

(3) Nella tabella del Grablovitz sono stati scambiati fra di loro i dati orarî dei due Osservatorî di Siena.

alcuna all'A. Nell'ipotesi che l'ora alquanto differente da lui riportata, provenisse dal vicino Osservatorio di *S. Luca*, mi sono rivolto a quest'ultimo, ma l'ora che mi è stata comunicata è assai diversa da quella del Grablovitz.

Non volli neppure utilizzare l'ora di Ferrara ($7^h\,53^m\,30^s$), anzitutto perchè fu data da soli sismoscopi (come a Bologna) e poi perchè incerta per $\pm 30^s$, a causa della mancanza d'un esatto tempo campione.

Similmente non presi in considerazione l'ora di Salò ($7^h\,53^m$) quale fu comunicata all'Ufficio Centr. di Met. e Geod. e poi stampata nell'apposito Bollettino. Dal vedere però che l'A. ha riportata per Salò un'ora diversa ($7^h\,53^m\,20^s$), mi sono rivolto a quell'Osservatorio, il quale mi ha riconfermata la primitiva ora, incerta però fino a $\pm 60^s$, pel fatto d'essere basata sul tempo del locale Ufficio Telegrafico!

A proposito dell'ora di Granata ($7_h\,55^m\,44^s$) che figura nella mia 1ª Nota e che era scritta sopra una copia del sismogramma di quell'Osservatorio, l'A. la trova troppo in anticipo in confronto d'altre località meno lontane dall'epicentro e dice che è un chiaro indizio dell'aumento della velocità con la distanza. Questo apprezzamento verrebbe completamente a mancare, dopo la spontanea rettifica di quell'Osservatorio. L'ora corretta ($7^h\,56^m\,3^s$) fu pubblicata nella mia 2ª Nota, ma non conosciuta in tempo dall'A. Nel Bollettino sismico di Granata figura un'ora quasi identica ($7^h\,56^m\,2^s$) che certamente rappresenta la definitiva.

E così pure nei Bollettini sismici di Padova e Moncalieri si trovano le ore rispettive: $7^h\,53^m\,41^s$ e $7^h\,54^m\,7^s$ invece delle altre $7^h\,53^m\,39^s$ e $7^h\,54^m\,6^s$ che a me furono comunicate e che in seguito furono ritenute suscettibili di sì lieve modificazione.

L'A. riporta per Roma $7^h\,52^m\,54^s$ invece dell'ora definitiva ($7^h\,52^m\,53^s$) che figura nella mia 2ª Nota (1).

A Taranto egli assegna due ore assai diverse: l'una ($7^h\,53^m\,11^s$) del sismografo « Wiechert », l'altra ($7^h\,53^m\,32^s$) del microsismografo « Vicentini ». Per la 1ª dev'esservi qualche equivoco, poichè nella comunicazione all'Ufficio Centr. di Met. e Geod. risulta $7^h\,53^m\,31^s$ proprio per il Wiechert, ora che mi fu confermata e che io presi in considerazione.

E vengo all'ora d'Ischia che fin dalla mia 1ª Nota ho ritenuta un po' anomala in confronto di altri Osservatorî. L'A. assicura di non doversi temere errore apprezzabile nel tempo campione, basato sopra un'esatta linea meridiana, ed io voglio crederlo; ma una lunga esperienza m'insegna che tante altre cause di errore possono insidiare la precisione dei dati orarî,

(1) Colgo l'occasione per riferire che anche alla *Specola Vaticana* si fermò, per effetto della scossa, il pendolo a t. m. dell'E. C. e precisamente a $7^h\,53^m\,29^s$, cioè pochi secondi dopo l'arresto dei due orologi a pendolo della Specola del Collegio Romano, ai quali accennai nella mia 1ª Nota.

anche all'insaputa d'un attento osservatore, e tra le medesime in modo speciale quelle dipendenti dagli strumenti adoperati, o per la loro insufficiente sensibilità o per l'*agitazione microsismica* che talora maschera l'inizio tenuissimo dei sismogrammi. E se nella mia 1ª Nota ho emesso il dubbio che le ore d'Ischia e di Valle di P. potessero essere alquanto in ritardo, confesso d'averlo fatto in seguito ad altre considerazioni, esposte nella mia 2ª Nota, che il mio egregio Collega non poteva aver letta quando egli scrisse la sua. E questo dubbio s'è in me vieppiù rafforzato dopo che nella Nota dell'A. ho conosciuta l'ora di Napoli ($7^h\,53^m\,7^s$) (1) in anticipo di ben 5 secondi su quella d'Ischia ($7^h\,53^m\,12^s$). Da informazioni assunte recentemente, è risultato che l'ora di Napoli fu determinata nel privato Istituto vulcanologico del sig. J. Friedländer, dove funzionava un sismografo « Mainka » a pendoli orizzontali (Kg. 130) ed un sismografo « Wiechert » (Kg. 80) per la comp. vert. Per il fatto che il tempo era registrato, ogni $^1/_2$ minuto, direttamente sulle zone da un buon pendolo, confrontato giornalmente con l'Osservatorio Astron. di Capodimonte, e di più la velocità delle zone era di ben 14^{mm} al minuto, non si può a meno dall'accordare una grande fiducia all'ora di Napoli. È vero che questa città si trova 4-5 Km. più vicina all'epicentro per rispetto ad Ischia; ma, data l'alta velocità delle onde sismiche iniziali, questa tenue differenza di percorso non basta a spiegare la differenza di 5 secondi! Il disaccordo tra Napoli ed Ischia è anche più sintomatico nel vedere che il terremoto sarebbe giunto ad Ischia un paio di secondi più tardi che a Valle di P., sebbene quest'ultima località si trovasse 16 Km. più lontana. Ma v'ha di più, ed è che il direttore dell'Osservatorio di Valle di P. esprime persino il dubbio che l'ora da lui determinata possa essere in ritardo d'un paio di secondi (2). Se ciò fosse, l'ora corretta di Valle di Pompei ($7^h\,53^m\,8^s$) s'accorderebbe benissimo con quella di Napoli ($7^h\,53^m\,7^s$) e anticiperebbe di ben 4 secondi in confronto d'Ischia ($7^h\,53^m\,12^s$), pur trovandosi Valle di P. di ben 16 Km. più lontana dall'epicentro! Le differenze sono realmente di pochi secondi, ma assurgono a grande importanza per l'enorme velocità delle onde iniziali; ad ogni modo non sono compatibili con la precisione fino a $= 1^s$ almeno, che si presume per ogni Osservatorio.

(1) L'ora comunicata al giornale di Napoli « Il Mattino » fu veramente $7^h\,53^m\,15^s$; ma, come ho saputo, si trattava d'un'ora provvisoria, letta alla meglio sulle zone dei sismografi, prima che fossero state fissate.

Trovo in una Memoria del prof. G. B. Alfano, citata appresso, che anche all'Oss. di *Capodimonte*, al pari di Roma, si arrestarono due pendoli astronomici: l'uno a $7^h\,53^m\,40^s$ e l'altro a $7^h\,53^m\,42^s$, cioè rispettivamente 33 e 35 sec. dopo l'inizio della scossa registrata dai sismografi nella stessa città.

(2) G. B. Alfano. *Studio delle registrazioni sismiche a Valle di Pompei per il terremoto di Avezzano del 13 gennaio 1915* (Atti dell'Acc. Nap. sc.-lett. S. Pietro in V., vol. II, pag. 224).

Non resta dunque che ad invocare per Ischia qualche ignorata causa d'errore, oppure l'influenza stessa degli strumenti, come ho già sopra accennato. A tale proposito mi piace ricordare il fatto, ormai ben accertato solo da chi possiede apparati assai delicati, che in molti sismogrammi l'inizio spiccato della perturbazione è preceduto, per pochi secondi, da lievissime irregolarità che provano essere già il suolo percorso da onde sismiche debolissime, foriere di altre più energiche. Ne segue che ove si disponga di strumenti poco sensibili, puossi perdere la registrazione delle minime onde precorritrici e non aversi che l'inizio brusco delle altre più forti sopraggiungenti.

* * *

In quanto al metodo adottato, nelle mie due Note precedenti, per la ricerca della velocità superficiale del terremoto, non ho esitato a prendere come sicuro punto di partenza l'ora media degli Osservatorî di M. Cassino ($7^h\ 52^m\ 50^s$), Rocca di Papa ($7^h\ 52^m\ 54^s$) e Roma ($7^h\ 52^m\ 53^s$) relativa alla distanza media d'una settantina di Km. dal presunto epicentro. Data la rara circostanza che assai vicini al medesimo siansi trovati questa volta ben tre Osservatorî muniti di buoni strumenti e d'un esatto tempo campione, mi ritenevo autorizzato a credere sufficientemente preciso l'istante in cui le onde sismiche erano giunte ad una piccola e nota distanza dal loro punto di partenza. L'A. teme, invece, che ponendo per base fondamentale di tutto il conteggio la media di tre dati con le incertezze ammesse, equivale a scaricare sulle stazioni contigue gli errori delle prime. Convengo che l'incertezza, sebbene assai piccola, dell'ora media da me presa a base del calcolo, possa sensibilmente influire per le stazioni poco più lontane; ma è appunto per questa ragione che nelle mie due Note precedenti ho omesso espressamente il calcolo definitivo della velocità per Ischia e Valle di P. Però, questa influenza non si può più rendere molto sensibile per stazioni ancor più lungi dall'epicentro, e quindi possiamo senz'altro procedere alla determinazione per la velocità per ognuna delle varie stazioni e poi giudicare a colpo d'occhio se la propagazione è stata o no uniforme al crescere della distanza, e se qualcuno dei dati orarî lasci più o meno a desiderare. Ripeto che l'incertezza per ognuno dei tre dati, presi a fondamento, è di per sè stessa tenuissima e forse anche minore di quella, sebbene non dichiarata, che compete alla maggior parte delle altre stazioni. Oltracciò, non si può neppure temere per i medesimi un errore sistematico, pel fatto che il tempo campione fu ottenuto in M. Cassino in modo esattissimo e affatto indipendente da quello di Roma; ad ogni modo l'incertezza viene ancora a diminuire nel valore medio, poichè, seppure gli errori non si compensano esattamente nella media, l'errore residuo resta diviso per tre (1).

(1) Tenendo conto degli *errori medi* di $\pm 3^s$ e $\pm 2^s$ ammessi rispettivamente per

L'A. crede più corretto d'assumere come incognite l'ora epicentrale e la velocità (1) e, pur ammettendo la velocità costante, dare ugual peso a tutti i dati attendibili, trattandoli col metodo de' minimi quadrati. Il chiaro mio Collega non può ignorare che assai spesso io ho adottato il metodo da lui accennato, e precisamente in quei casi in cui mancavano i dati orarî perfino in prossimità dell'area epicentrale. Anzi, io stesso ho criticato varie volte chi ha assunto come punto di partenza un solo dato orario, tutt'altro che immune da grave incertezza, e per tal fatto è giunto a velocità notevolmente variabili con la distanza. Se dunque questa volta ho adottato altro metodo, gli è perchè ero convinto che avrebbe condotto a risultati più soddisfacenti. Supponiamo il caso ideale che si potesse conoscere l'ora esatta proprio all'epicentro; forse che l'A. penserebbe a ricorrere ai minimi quadrati? Pel terremoto di Messina del 1908 il Rizzo e l'Omori assunsero senz'altro, come ora epicentrale, quella stessa determinata in detta città. Eppure si potrebbe giustamente osservare che se per caso l'ora di Messina fosse errata, tutte le velocità calcolate risentirebbero dell'errore. Nel caso nostro non possiamo, è vero, conoscere proprio l'ora all'epicentro, bensì quella osservata a piccolissima distanza dallo stesso: ma in compenso si tratta di un'ora assai più garantita, in confronto di quella di Messina, pel fatto che rappresenta il risultato di ben tre Osservatorî. Pel terremoto Calabro del 1905 lo stesso Rizzo non esitò a basarsi sulle sole due ore di Messina e Catania, rispettivamente a 84 e 174 Km. dal presunto epicentro, per determinare

---

Rocca di Papa e Roma, per le ragioni già esposte nella mia 1ª Nota, e volendo anche supporre che l'ora di M. Cassino possa contenere un errore di $\pm 2^s$, i pesi dei dati orarî di questi tre osservatorî sarebbe rispettivamente: 4 , 9 , 9; e perciò l'ora media, tenendo conto dei pesi, sarebbe appunto:

$$\frac{4\,(7^h\,52^m\,54^s) + 9\,(7^h\,52^m\,53^s) + 9\,(7^h\,52^m\,50^s)}{22} = 7^h\,52^m\,52^s \text{ c.}\,.$$

alla quale spetterebbe un peso $= 22$ ed un *errore medio* di neppure $\pm 1^s\,{}^1/_3$.

Da ciò si vede come l'ora media, da me presa fin qui a base del calcolo, possa ispirare una sufficiente fiducia la quale crescerebbe ancora se, come non è improbabile, fosse ancor più piccolo l'errore medio attribuito a M. Cassino.

In generale, per un amor proprio fuori di luogo e sempre dannosissimo alla scienza, si è portati ad esagerare la precisione dei dati ricavati nel proprio osservatorio. Da parte mia, credo di peccare nel senso opposto, ed è meglio. Tenuto conto della bontà del tempo campione in Roma, utilizzato eziandio a Rocca di Papa, della concordanza delle ore ricavate dai varî strumenti, e poi della registrazione del tempo sulle zone, di minuto in minuto, per mezzo d'un cronometro di marina, infine della notevole velocità di scorrimento delle stesse zone, forse un altro direttore non avrebbe esitato a ritenere esatte fino a $\pm 1^s$ le ore di Roma e Rocca di Papa.

(1) Veramente, l'incognita y, assunta dall'A. non è la velocità, ma l'inverso della stessa.

l'ora epicentrale e poi confrontare con essa quelle osservate alle varie distanze. Ognun vede come il procedimento sia stato assai meno legittimo del nostro: anzitutto perchè l'ora epicentrale era appoggiata a soli due Osservatorî, poi perchè questi si trovavano a maggior distanza dall'epicentro, infine perchè la posizione di quest'ultimo era senza paragone più incerta in confronto del terremoto Marsicano (1). Infine, il metodo de' minimi quadrati, sia per l'ipotesi che si deve immancabilmente fare sulla propagazione costante o variabile delle onde sismiche, sia per gli errori, anche notevoli, che possono inquinare i dati orarî osservati alle varie distanze, potrebbe pur darci un'ora epicentrale assai diversa dalla vera e quindi anche una falsa idea della velocità cercata (2).

In una prossima Nota mi riservo di far conoscere il risultato d'uno studio meno incompleto sulla velocità del terremoto Marsicano in base alle ore già note, debitamente rettificate, ed a quelle di molti altri Osservatorî, specialmente esteri.

Fisiologia. — *Influenza dell'attenzione su la secrezione dei succhi digerenti.* Nota di B. Brunacci, presentata dal Socio Luigi Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Ed ugualmente il Rizzo, pel terremoto di Feruzzano del 1907, dedusse l'ora epicentrale dalle sole ore di Messina e Catania, distanti rispettivamente 50 e 107 Km. dal presunto epicentro.

(2) E pare che ciò sia avvenuto proprio nel calcolo dell'A., poichè se ci basiamo sulla velocità da lui trovata di m. 8379, s'otterrebbe per il suo epicentro l'ora: $7^h\,52^m\,50^s$, identica a quella stessa di M. Cassino che se ne trova distare per ben 57 Km., e inferiore di soli 3 secondi a quella di Roma, distante 89 Km. Nel 1° caso si avrebbe una velocità infinita, nel 2° caso una velocità di quasi 30000 m. al secondo! E poichè l'ora di Roma presenta un errore probabile di $\pm 2^s$, così anche ammettendo il peggior caso, che sia cioè errata di 2^s in meno, e dovendola perciò rettificare in $7^h\,52^m\,55^s$, si otterrebbe sempre una velocità troppo alta (c. 18000 m.). Ma anche basandosi sull'altra velocità di m. 7875 trovata dall'A. coll'esclusione dell'ora di Granata, si otterrebbe per l'epicentro: $7^h\,52^m\,47^s$, la quale anticipa di soli 3 secondi rispetto a M. Cassino e di 6 rispetto a Roma e condurrebbe perciò alle rispettive velocità di 19000 e c. 15000 m. al secondo. Dunque il risultato dell'A. è in opposizione alla realtà, in quanto che la sua ora epicentrale è, in ogni caso, in disaccordo tanto con quella di Roma, quanto con quella probabilmente più sicura di M. Cassino.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Ròiti dà il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. Luigi Balbiano, e commemora con affettuose parole il compianto Collega, di cui ricorda il carattere integro e l'alto valore scientifico; aggiunge che il defunto ha espresso nel suo testamento la ferma volontà di non essere commemorato in alcuno dei sodalizi scientifici ai quali apparteneva.

Lo stesso Presidente dà comunicazione di una lettera inviata dal Segretario perpetuo dell'Accademia delle scienze di Parigi, colla quale quest'ultima ringrazia per le manifestazioni di cordoglio dell'Accademia dei Lincei in occasione della morte del prof. Gastone Darboux.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalandone alcune inviate dal Corrisp. G. Arcangeli. Richiama inoltre l'attenzione della Classe sul volume edito a cura della Specola Vaticana: *Aggiunte al Catalogo dell' « Atlas Stellarum variabilium »* del P. J. G. Hagen; sul *Catalogo stellare; zona 52°-60°*, vol. III, dell'Osservatorio astronomico di la Plata; sulla pubblicazione del Ministero d'Agricoltura: *Carta idrografica d'Italia: il Tanaro*, per E. Perrone; e sui fascicoli 48 e 49 contenenti i risultati delle Campagne scientifiche del Principe di Monaco, fatte a bordo dell' « Hirondelle » e della « Princesse-Alice ».

Il Segretario Millosevich presenta, a nome dell'autore, l'opera del prof. Antonio Baldacci, intitolata: *Itinerari Albanesi (1892-1902)*. Della grande competenza del Baldacci in riguardo all'Albania nei riflessi etnografici, geografici, corografici e toponomastici discorre il Segretario, accennando alle ragioni scientifiche e nazionali che spinsero la Reale Società Geografica Italiana a raccogliere in un unico volume tutti gli scritti del Baldacci riguardanti i suoi viaggi e i suoi studî sull'Albania; viaggi e studî, che oggidì sono utilizzati dal Comando Supremo nelle nostre contingenze di guerra, nelle quali il Baldacci è strumento prezioso trovandosi presentemente appunto a Vallona.

M. E.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° aprile 1917.

Arcangeli G. — Alcune altre osservazioni sulla *Victoria regia* Lindl. (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXV). Pisa, 1916. fol.

Arcangeli G. — Di nuovo sulle piante di *Pinus Pinea* var. *fragilis*, coltivate nell'Orto botanico pisano (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze Naturali », vol. XXV). Pisa, 1916. fol.

Arcangeli G. — Sopra alcune varietà del *Diospyros Kaki* e sopra una malattia riscontrata in una di esse (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXV, pp. 1-12). Pisa, 1916. 8°.

Arcangeli G. — Sopra alcuni fossili della Sardegna e di Jano (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze Naturali », vol. XXV; pp. 1-6). Pisa, 1916. 8°.

Arcangeli G. — Sull'esplorazioni polari e sui ghiacci polari (Estr. dai « Processi verbali della Soc. toscana di Scienze naturali », vol. XXIV, pp. 1-10). Pisa, 1915. 8°.

Baldacci A. — Itinerari Albanesi (1892-1902). Roma, 1917. 4°, pp. 1-541.

Carta Idrografica d'Italia. — Tanara Ministero di Agricoltura). Roma, 1916. 8°, pp. 1-370.

Hagen S. I. G. — Aggiunte al Catalogo dell' « Atlas Stellarum variabilium » (Specola Astronomica Vaticana, vol. XI). Roma, 1916. 4°, pp. 1-269.

Malenotti E. — *Metalaptus Torquatus* n. gen. e n. specie di calcidite (Estr. dal « Redia » vol. XII, pp. 339-340). Firenze, 1917. fol.

Resultado de las observaciones en la zona. — 52° A — 56° durante los años 1913, 1914. y 1915 y en la zona — 57° A — 61 durante el año 1915 (Observatorio astronomico, vol. III). La Plata, 1916. 4°, pp. 1-451.

Vallanzi G. — Sul funzionamento dei tubi a vuoto a tre elettrodi (audion), usati nella radiotelegrafia (Estr. dal Giornale « L'Elettrotecnica » pp. 1-18). Milano, 1917. 4°.